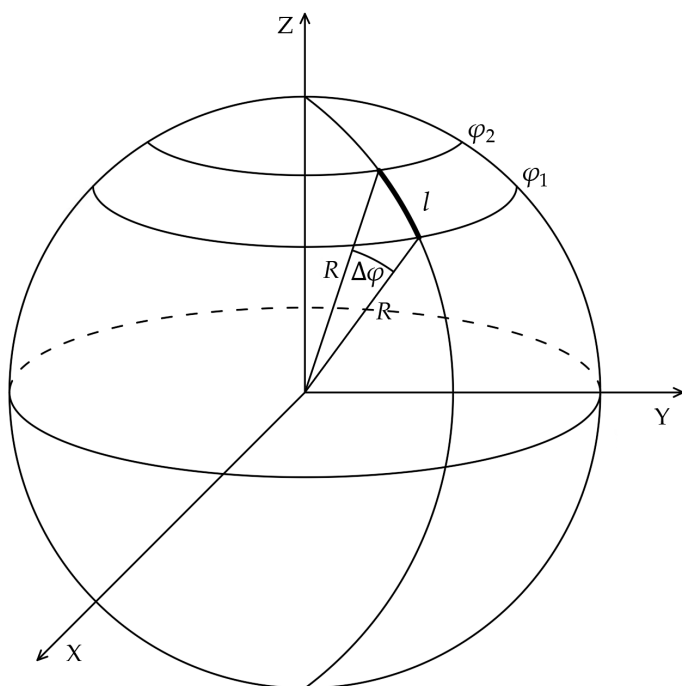


VAJA 11: SFERNA TRIGONOMETRIJA V NAVIGACIJI

2024/2025

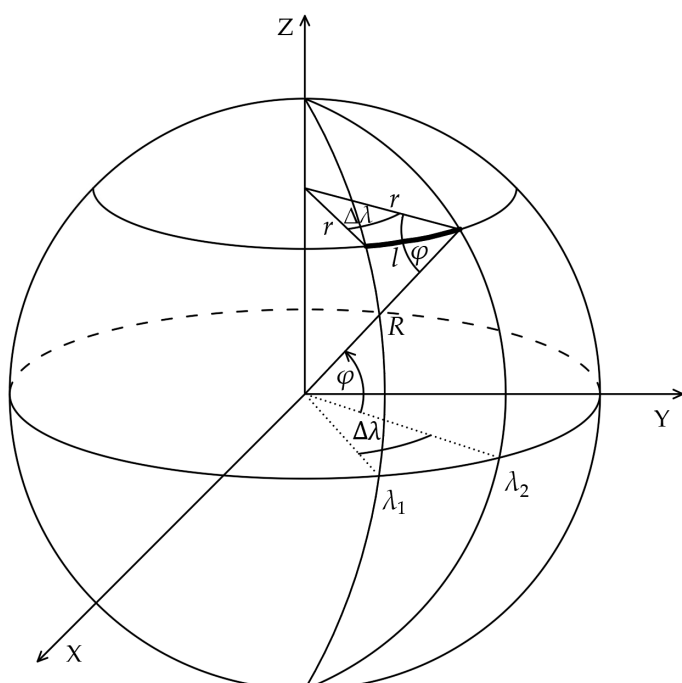
1 DOLŽINA LOKA POLDNEVNIKA (MERIDIANA) NA ZEMLJI-KROGLI



$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| \quad (1.1)$$

$$l = R \Delta\varphi \frac{\pi}{180^\circ} \quad (1.2)$$

2 DOLŽINA LOKA VZPOREDNIKA NA ZEMLJI-KROGLI



$$\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1| \quad (2.1)$$

$$r = R \cos \varphi \quad (2.2)$$

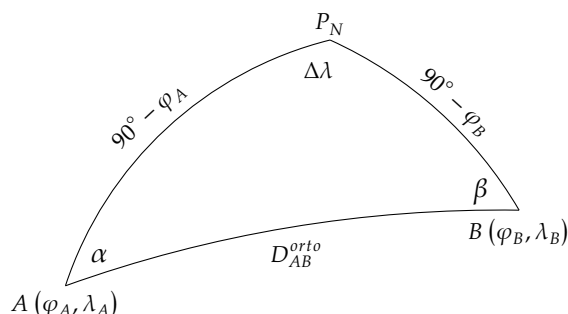
$$l = r \Delta\lambda \frac{\pi}{180^\circ} \quad (2.3)$$

$$l = R \cos \varphi \Delta\lambda \frac{\pi}{180^\circ} \quad (2.4)$$

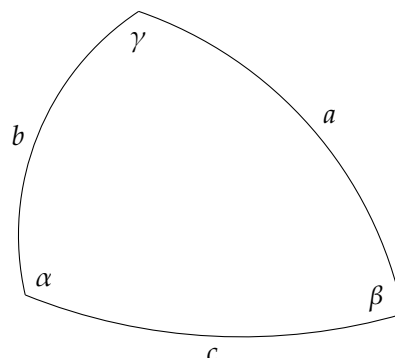
3 NAVTIČNI SFERNI TRIKOTNIK

Navtični sferni trikotnik tvorita dve poljubni točki na Zemlji-krogli in **severni pol**.

NAVTIČNI SFERNI TRIKOTNIK



SPLOŠNI SFERNI TRIKOTNIK



$$a = 90^\circ - \varphi_B$$

$$b = 90^\circ - \varphi_A$$

$$c = D_{AB}^{orto}$$

$$\gamma = \Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_A|$$

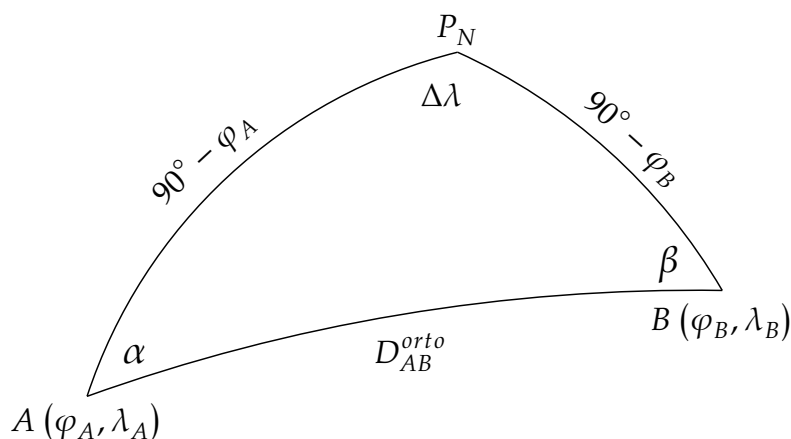
4 ORTODROMA

Ortodroma oziroma geodetska linija je najkrajša razdalja med dvema točkama na krogli. Ortodroma je krajši lok velikega kroga skozi izbrani točki na površju krogle. Kot pot plovbe/leta ni primerna, saj bi moralo plovilo/letalo za pot po ortodromi stalno spreminjati smer (kurz) plovbe/leta.

Poldnevniko so veliki krogi → loki poldnevnikov so torej ortodrome. Vzporodniki so mali krogi (razen ekvator) → loki vzporodnikov NISO ortodrome (razen loki ekvatorja).

dano: začetna točka $A(\varphi_A, \lambda_A)$, končna točka $B(\varphi_B, \lambda_B)$

iščemo: D_{AB}^{orto}



Ortodromno razdaljo v kotnih enotah izračunamo z uporabo kosinusnega izrek za stranice:

$$\cos D_{AB}^{orto} = \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos(90^\circ - \varphi_B) + \sin(90^\circ - \varphi_A) \sin(90^\circ - \varphi_B) \cos \Delta\lambda \quad (4.1)$$

kjer je:

$$\Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_A| \quad (4.2)$$

Če enačbo (4.1) poenostavimo, dobimo:

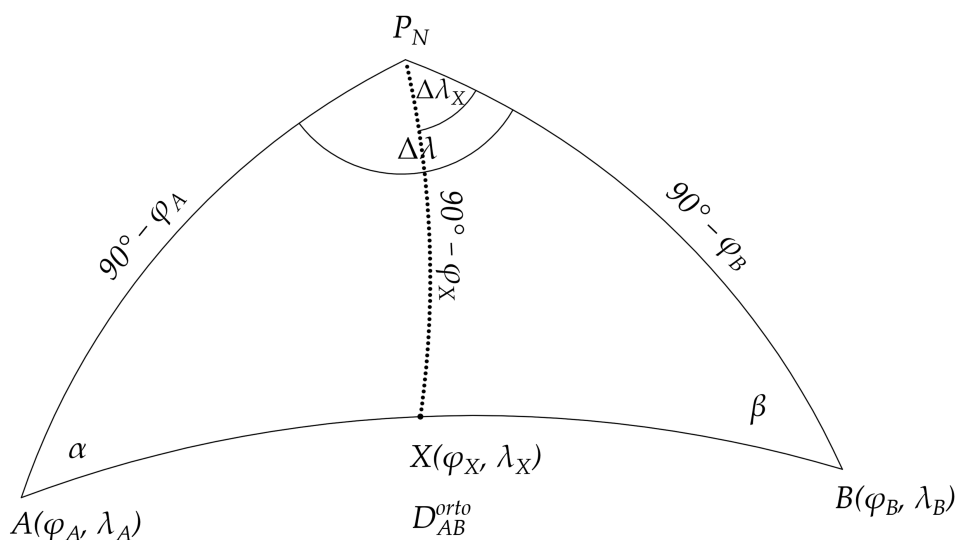
$$\cos D_{AB}^{orto} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta\lambda \quad (4.3)$$

Ortodromno razdaljo v dolžinskih enotah na krogli s polmerom R izračunamo kot:

$$D_{AB}^{orto}[\text{m}] = R \cdot D_{AB}^{orto}[^{\circ}] \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} \quad (4.4)$$

4.1 Kraj na ortodromi

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B), \lambda_X$

iščemo: φ_X 

- i) Izračunamo ortodromno razdaljo D_{AB}^{orto} – enačba (4.1) oziroma (4.3).
- ii) Izračunamo kot β – kosinusni izrek za stranico b :

$$\cos \beta = \frac{\cos (90^\circ - \varphi_A) - \cos (90^\circ - \varphi_B) \cos D_{AB}^{orto}}{\sin (90^\circ - \varphi_B) \sin D_{AB}^{orto}} \quad (4.5)$$

- iii) Izračunamo φ_X – kotangensni izrek:

$$\cot(90^\circ - \varphi_X) = \frac{\cos(90^\circ - \varphi_B) \cos \Delta\lambda_X + \sin \Delta\lambda_X \cot \beta}{\sin(90^\circ - \varphi_B)} \quad (4.6)$$

kjer je:

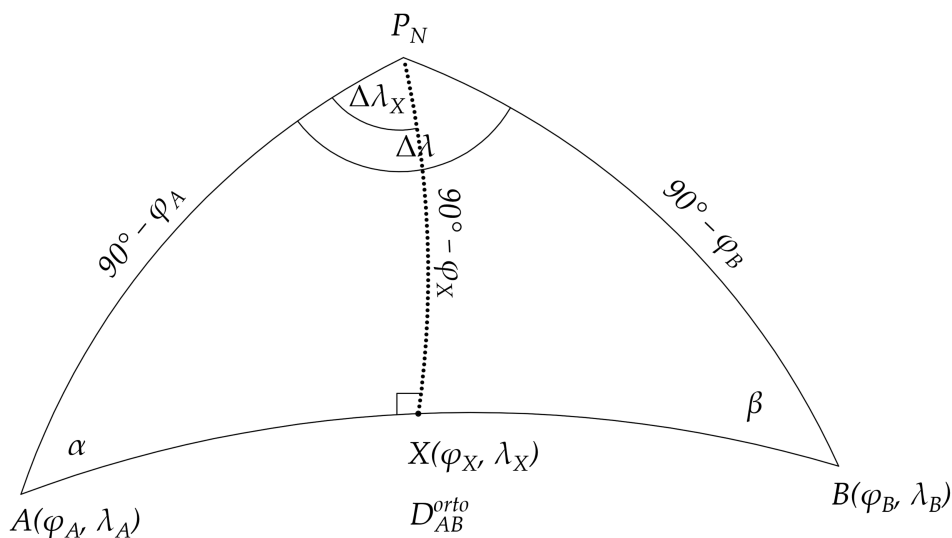
$$\Delta\lambda_X = |\lambda_B - \lambda_X| \quad (4.7)$$

4.2 Najsevernejša točka ortodrome

Za najsevernejšo točko poljubnega velikega kroga velja, da je v njej sferni kot med obravnavanim velikim krogom in krajevnim poldnevnikom najsevernejše točke enak 90° . Če ta točka leži na ortodromi med krajema A in B , potem je to najsevernejša točka ortodrome iz A v B . V nasprotnem primeru je najsevernejša točka ortodrome krajiščna točka z večjo geografsko širino.

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A)$, $B(\varphi_B, \lambda_B)$ ali $A(\varphi_A, \lambda_A)$, α

iščemo: φ_X



i) Izračunamo ortodromno razdaljo D_{AB}^{orto} – enačba (4.1) oziroma (4.3).

ii) Izračunamo kot α – kosinusni izrek za stranico a :

$$\cos \alpha = \frac{\cos(90^\circ - \varphi_B) - \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos D_{AB}^{orto}}{\sin(90^\circ - \varphi_A) \sin D_{AB}^{orto}} \quad (4.8)$$

iii) Izračunamo φ_X in λ_X – Napierjevo pravilo za pravokotni sferni trikotnik AXP_N :

$$\cos \varphi_X = \sin \alpha \sin(90^\circ - \varphi_A) \quad (4.9)$$

$$\cos \Delta \lambda_X = \cot \varphi_X \cot(90^\circ - \varphi_A) \quad (4.10)$$

$$\lambda_X = \lambda_A + \Delta \lambda_X \quad (4.11)$$

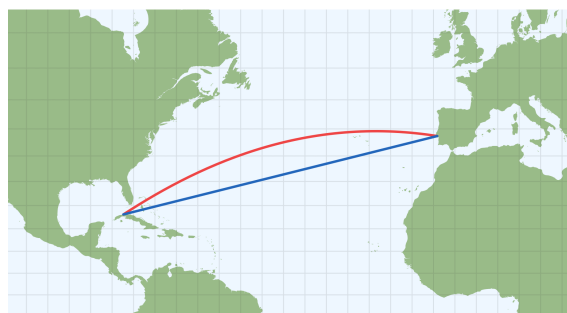
5 LOKSODROMA

Loksodroma je pot med dvema točkama na krogli, ki vse poldnevnikke seka pod enakim kotom. Pot po loksodromi je daljša od poti po ortodromi, a plovilu/letalu, ki potuje po loksodromi, ni potrebno spreminjati kurza plovbe/leta.

Vzporedniki sekajo vse poldnevnikke pod kotom $90^\circ \rightarrow$ loki vzporednikov so torej loksodrome. Pri potovanju po poldnevniku je smer poti ves čas konstantna (ali 0° ali 180°) $\rightarrow$ loki poldnevnikov so torej tudi loksodrome (in hkrati tudi ortodrome).



ortografska projekcija



Mercatorjeva projekcija

dano: začetna točka $A (\varphi_A, \lambda_A)$, končna točka $B (\varphi_B, \lambda_B)$

iščemo: $D_{AB}^{loksodrom}$, α

Loksodroma ni lok velikega kroga, zato ne moremo uporabiti enačb sferne trigonometrije. Azimut loksodrome (smer poti oziroma kurz) α izračunamo kot:

$$\cot \alpha = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_A) \frac{\pi}{180^\circ}} \ln \left(\frac{\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi_B}{2} \right)}{\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2} \right)} \right) \quad (5.1)$$

Za končni izračun azimuta je potrebno določiti še njegov kvadrant:

$\lambda_A - \lambda_B$	$\cot \alpha$	kvadrant	α
–	+	I. kvadrant	α
–	–	II. kvadrant	$\alpha + 180^\circ$
+	+	III. kvadrant	$\alpha + 180^\circ$
+	–	IV. kvadrant	$\alpha + 360^\circ$

Dolžino loksodrome v dolžinskih enotah izračunamo kot:

$$D_{AB}^{loksodrom} = R \frac{(\varphi_B - \varphi_A)}{\cos \alpha} \frac{\pi}{180^\circ} \quad (5.2)$$

Če je azimut loksodrome 0° ali $180^\circ \rightarrow$ potujemo po poldnevniku. Enačba (5.2) se preoblikuje v enačbo (1.2) za izračun dolžine loka poldnevnika.

Če je azimut loksodrome 90° ali $270^\circ \rightarrow$ potujemo po vzporedniku. V tem primeru enačbe (5.2) ne moremo uporabiti, temveč moramo uporabiti enačbo (2.4) za izračun dolžine loka vzporednika.

5.1 Kraj na loksodromi

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B), \lambda_X$

iščemo: φ_X

i) Izračunamo azimut loksodrome α – enačba (5.1).

ii) Iz enačbe (5.1) za izračun azimuta loksodrome izpeljemo enačbo za φ_X , pri čemer točko A zamenjamo s točko X :

$$\varphi_X = 2 \left[\arctan(e^\mu) - 45^\circ \right] \quad (5.3)$$

kjer je:

$$\mu = \frac{|\lambda_B - \lambda_X| \frac{\pi}{180^\circ}}{\tan \alpha} + \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi_B}{2} \right) \right] \quad (5.4)$$