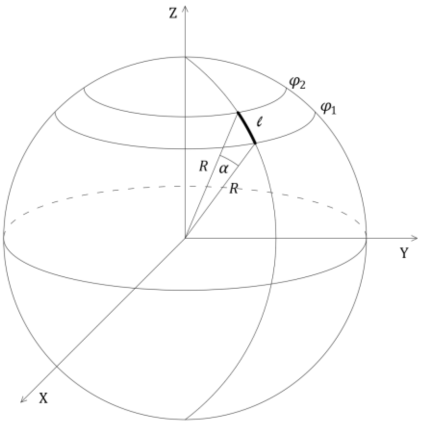
GEODETSKI RAČUNI – VAJE

VAJA 11 – SFERNA TRIGONOMETRIJA V NAVIGACIJI

1 DOLŽINA LOKA POLDNEVNIKA (MERIDIANA) NA ZEMLJI-KROGLI

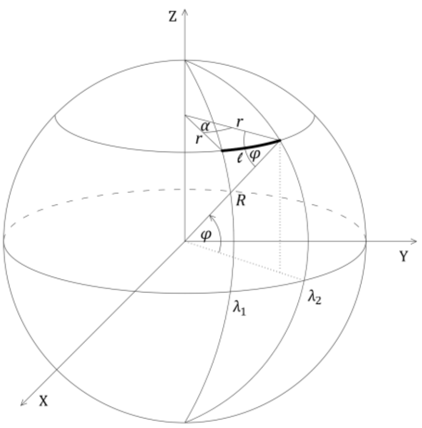


$$\alpha = \Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$$

Logični razmislek, ali: $\Delta\varphi = 360 - \Delta\varphi$

$$l = R\ \Delta\varphi[°]\frac{\pi}{180°} = R\ \Delta\varphi[\mathrm{rad}]$$

2 DOLŽINA LOKA VZPOREDNIKA NA ZEMLJI-KROGLI



$$\alpha = \Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$$

Logični razmislek, ali: $\Delta\lambda = 360 - \Delta\lambda$

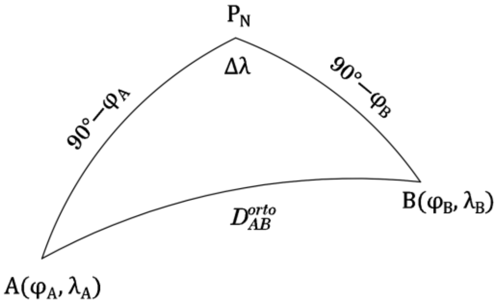
$$r = R\cos\varphi$$

$$l = r\ \Delta\lambda[°]\frac{\pi}{180°} = r\ \Delta\lambda[\mathrm{rad}]$$

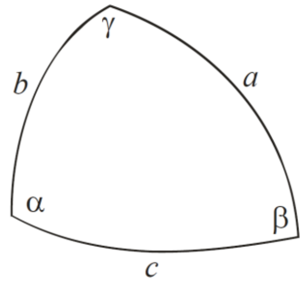
3 NAVTIČNI SFERNI TRIKOTNIK

Navtični sferni trikotnik tvorita dve poljubni točki in **severni pol**.

NAVTIČNI SFERNI TRIKOTNIK



SPLOŠNI SFERNI TRIKOTNIK



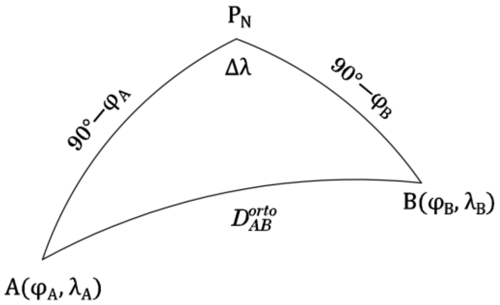
$a = 90° - \varphi_B$ $\quad$ $b = 90° - \varphi_A$ $\quad$ $c = D_{AB}^{orto}$ $\quad$ $\gamma = |\lambda_B - \lambda_A|$

4 ORTODROMA

Ortodroma je krajši lok velikega kroga skozi dani točki na površju krogle. Predstavlja najkrajšo razdaljo med dvema točkama na krogli. Kot pot plovbe/leta ni primerna saj moral plovilo/letalo pri potovanju po ortodromi stalno spreminjati smer (kurz) poti.

Poldnevniki so veliki krogi → loki poldnevnikov so torej ortodrome. Vzporedniki so mali krogi (razen ekvator) → loki vzporednikov NISO ortodrome (razen loki ekvatorja).

<u>dano</u>: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B)$
<u>iščemo</u>: D_{AB}^{orto}



Dolžino ortodrome v kotnih enotah izračunamo z uporabo kosinusnega izrek za stranice:

$$\cos D_{AB}^{orto} = \cos(90° - \varphi_A)\cos(90° - \varphi_B) + \sin(90° - \varphi_A)\sin(90° - \varphi_B)\cos\Delta\lambda$$

kjer je:

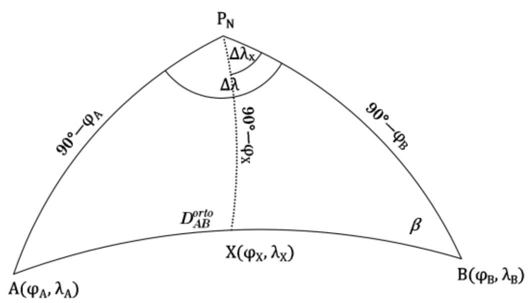
$$\Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_A|$$

Dolžino ortodrome v dolžinskih enotah izračunamo kot:

$$D_{AB}^{orto}[\mathrm{m}] = R[\mathrm{m}]\, D_{AB}^{orto}[°]\,\frac{\pi}{180°}$$

4.1 Kraj na ortodromi

<u>dano</u>: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B), \lambda_X$
<u>iščemo</u>: φ_X



i) Izračunamo D_{AB}^{orto}.

ii) Izračunamo kot β (kosinusni izrek za stranico b):

$$\cos\beta = \frac{\cos(90° - \varphi_A) - \cos(90° - \varphi_B)\cos D_{AB}^{orto}}{\sin(90° - \varphi_B)\sin D_{AB}^{orto}}$$

iii) Izračunamo φ_X (kotangensni izrek):

$$\cot(90° - \varphi_X) = \frac{\cos(90° - \varphi_B)\cos\Delta\lambda_X + \sin\Delta\lambda_X \cot\beta}{\sin(90° - \varphi_B)}$$

kjer je:

$$\Delta\lambda_X = |\lambda_B - \lambda_X|$$

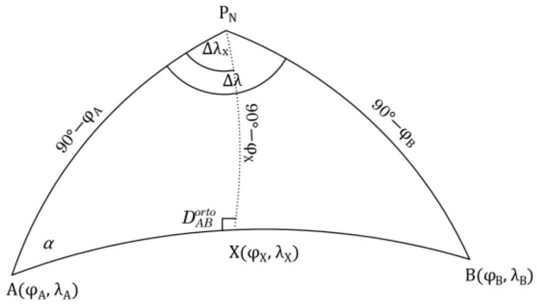
4.2 Najsevernejša točka ortodrome

Za najsevernejšo točko poljubnega velikega kroga velja, da je v njej sferni kot med obravnavanim velikim krogom in krajevnim poldnevnikom najsevernejše točke enak 90°. Če ta točka leži na ortodromi med krajema A in B, potem je to najsevernejša točka ortodrome iz A v B. V nasprotnem primeru je najsevernejša točka ortodrome krajiščna točka z večjo geografsko širino.

<u>dano</u>: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B)$
<u>iščemo</u>: $X(\varphi_X, \lambda_X)$

ali

<u>dano</u>: $A(\varphi_A, \lambda_A), \alpha$
<u>iščemo</u>: $X(\varphi_X, \lambda_X)$



i) Izračunamo D_{AB}^{orto}.

ii) Izračunamo kot α (kosinusni izrek za stranico a):

$$\cos\alpha = \frac{\cos(90° - \varphi_B) - \cos(90° - \varphi_A)\cos D_{AB}^{orto}}{\sin(90° - \varphi_A)\sin D_{AB}^{orto}}$$

iii) Izračunamo φ_X in λ_X (Napierjevo pravilo za pravokotni trikotnik AXP_N):

$$\cos\varphi_X = \sin\alpha\sin(90° - \varphi_A)$$

$$\cos\Delta\lambda_X = \cot\varphi_X\cot(90° - \varphi_A)$$

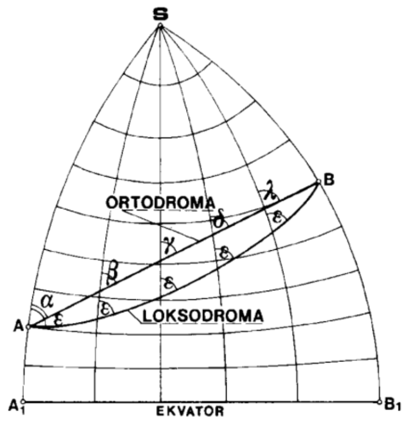
$$\lambda_X = \lambda_A + \Delta\lambda_X$$

5 LOKSODROMA

Loksodroma je pot med dvema točkama na površju krogle, ki vse poldnevnike seka pod enakim kotom. Pot po loksodromi je daljša od poti po ortodromi, a plovilu/letalu, ki potuje po loksodromi, ni potrebno spreminjati kurza poti.

Vzporedniki sekajo vse poldnevnike pod kotom 90° → loki vzporednikov so torej loksodrome. Pri potovanju po poldnevniku je smer poti ves čas konstantna (0° ali 180°) → loki poldnevnikov so torej loksodrome in hkrati tudi ortodrome.

<u>dano</u>: začetna točka $A(\varphi_A, \lambda_A)$, končna točka $B(\varphi_B, \lambda_B)$
<u>iščemo</u>: D_{AB}^{lokso}, α



Loksodroma ni lok velikega kroga, zato ne moremo uporabiti enačb sferne trigonometrije. Azimut loksodrome (smer poti oziroma kurz) α (na zgornji skici označen z ε) izračunamo kot:

$$\cot\alpha = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_A)\frac{\pi}{180°}} \ln\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)}\right)$$

Za končni izračun azimuta je potrebno določiti še njegov kvadrant:

$\boldsymbol{\lambda_A - \lambda_B}$	$\boldsymbol{\cot\alpha}$	**kvadrant**	$\boldsymbol{\alpha}$
$-$	$+$	I. kvadrant	α
$-$	$-$	II. kvadrant	$\alpha + 180°$
$+$	$+$	III. kvadrant	$\alpha + 180°$
$+$	$-$	IV. kvadrant	$\alpha + 360°$

Dolžino loksodrome v dolžinskih enotah izračunamo kot:

$$D_{AB}^{loks} = R\frac{(\varphi_B - \varphi_A)}{\cos\alpha}\frac{\pi}{180°}$$

Če je azimut loksodrome 0° ali 180° → letimo po poldnevniku. Zgornja enačba se preoblikuje v enačbo za izračun dolžine loka poldnevnika.

Če je azimut loksodrome 90° ali 270° → letimo po vzporedniku. V tem primeru zgornje enačbe ne moremo uporabiti, temveč moramo uporabit enačbo za izračun dolžine loka vzporednika.

5.1 Kraj na loksodromi

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B), \lambda_X$
iščemo: φ_X

i) Izračunamo azimut (kurz) loksodrome α.
ii) Iz enačbe za izračun azimuta loksodrome izpeljemo enačbo za φ_X:

$$\varphi_X = 2[\arctan(e^{\mu}) - 45°]$$

kjer je μ:

$$\mu = \frac{|\lambda_B - \lambda_X|\frac{\pi}{180°}}{\tan\alpha} + \ln\left[\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)\right]$$