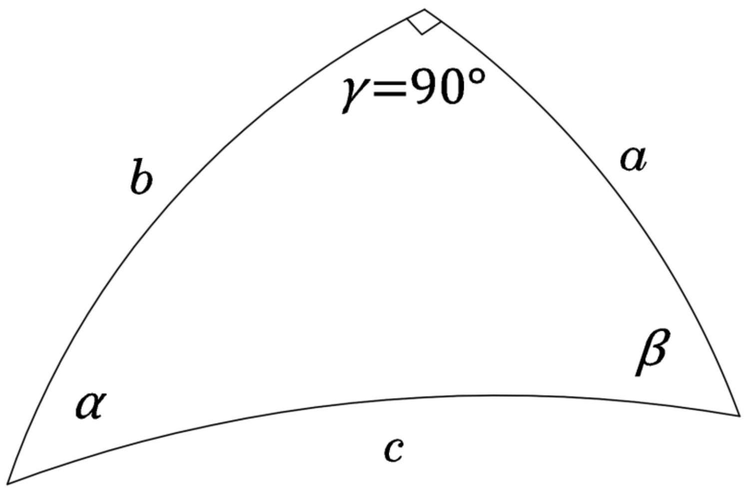
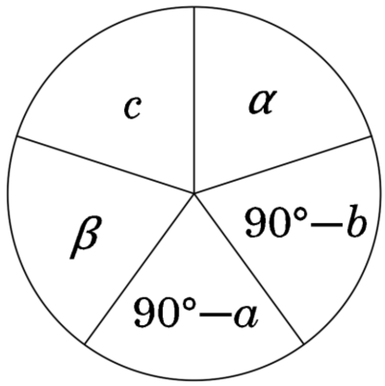
VAJA 9 – DEL 2: SFERNA TRIGONOMETRIJA – PRAVOKITNI IN PROVOSTRANIČNI SFERNI TRIKOTNIK, ORTODROMA IN LOKSODROMA

1 PRAVOKOTNI SFERNI TRIKOTNIK





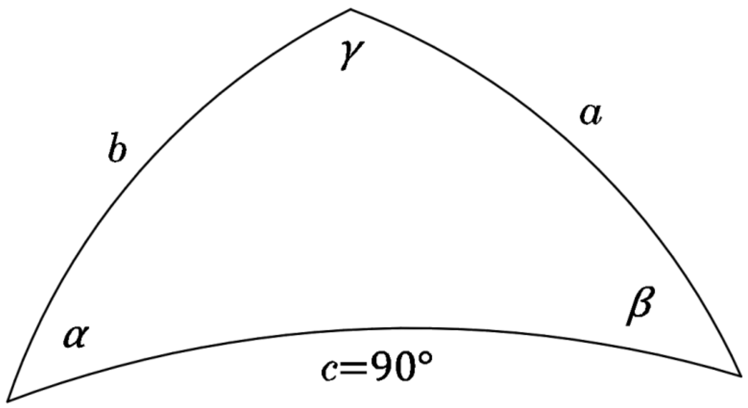
Napierjevo pravilo

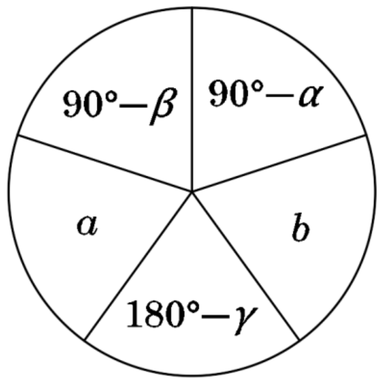
Kosinus izbranega elementa v "krogu" (shema desno) je enak (shema zgoraj desno):

i) produktu kotangensov sosednjih elementov,
ii) produktu sinusov nasprotnih elementov.

Osnovna oblika izraza	**Poenostavljena oblika izraza**
$\cos c = \cot\beta\cot\alpha$	$\cos c = \cot\beta\cot\alpha$
$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b)$	$\cos c = \cos a\cos b$
$\cos\alpha = \cot c\cot(90° - b)$	$\cos\alpha = \cot c\tan b$
$\cos\alpha = \sin\beta\sin(90° - \alpha)$	$\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(90° - b) = \cot\alpha\cot(90° - a)$	$\sin b = \cot\alpha\tan a$
$\cos(90° - b) = \sin c\sin\beta$	$\sin b = \sin c\sin\beta$
$\cos(90° - a) = \cot(90° - b)\cot\beta$	$\sin a = \tan b\cot\beta$
$\cos(90° - a) = \sin\alpha\sin c$	$\sin a = \sin\alpha\sin c$
$\cos\beta = \cot(90° - a)\cot c$	$\cos\beta = \tan a\cot c$
$\cos\beta = \sin(90° - b)\sin\alpha$	$\cos\beta = \cos b\sin\alpha$

2 PRAVOSTRANIČNI SFERNI TRIKOTNIK





Napierjevo pravilo

Kosinus izbranega elementa v "krogu" (shema desno) je enak (shema zgoraj desno):

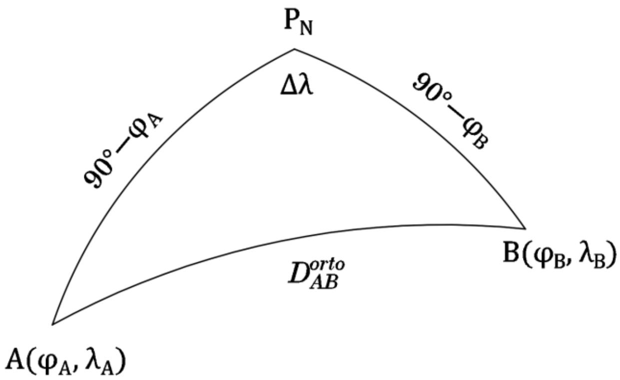
i) produktu kotangensov sosednjih elementov,
ii) produktu sinusov nasprotnih elementov.

Osnovna oblika izraza	**Poenostavljena oblika izraza**
$\cos(90° - \alpha) = \cot(90° - \beta)\cot b$	$\sin\alpha = \tan\beta\cot b$
$\cos(90° - \alpha) = \sin a \sin(180° - \gamma)$	$\sin\alpha = \sin a \sin\gamma$
$\cos b = \cot(90° - \alpha)\cot(180° - \gamma)$	$\cos b = -\tan\alpha\cot\gamma$
$\cos b = \sin(90° - \beta)\sin a$	$\cos b = \cos\beta\sin a$
$\cos(180° - \gamma) = \cot b \cot a$	$\cos\gamma = -\cot b\cot a$
$\cos(180° - \gamma) = \sin(90° - \alpha)\sin(90° - \beta)$	$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta$
$\cos a = \cot(180° - \gamma)\cot(90° - \beta)$	$\cos a = -\cot\gamma\tan\beta$
$\cos a = \sin b \sin(90° - \alpha)$	$\cos a = \sin b\cos\alpha$
$\cos(90° - \beta) = \cot a \cot(90° - \alpha)$	$\sin\beta = \cot a\tan\alpha$
$\cos(90° - \beta) = \sin(180° - \gamma)\sin b$	$\sin\beta = \sin\gamma\sin b$

3 ORTODROMA

Ortodroma oziroma geodetska linija je najkrajša razdalja med dvema točkama na krogli. Ortodroma je krajši lok velikega kroga skozi dani točki na površju krogle. Kot pot plovbe/leta ni primerna saj bi moralo plovilo/letalo za pot po ortodromi stalno spreminjati smer (kurz) poti.

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B)$
iščemo: D_{AB}^{orto}



Dolžino ortodrome v kotnih enotah izračunamo z uporabo kosinusnega izrek za stranice:

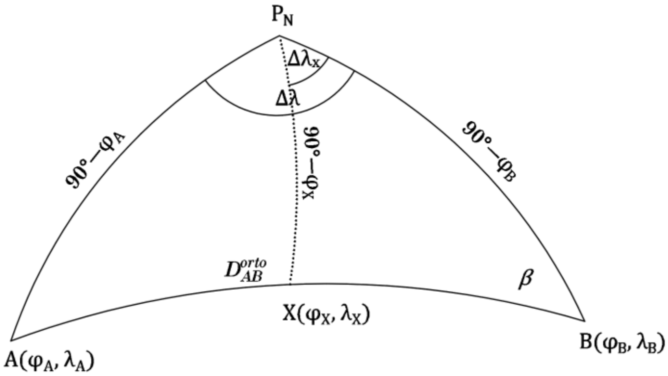
$$\cos D_{AB}^{orto} = \cos(90° - \varphi_A)\cos(90° - \varphi_B) + \sin(90° - \varphi_A)\sin(90° - \varphi_B)\cos\Delta\lambda$$

kjer je:

$$\Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_A|$$

Kraji na ortodromi

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B), \lambda_X$
iščemo: φ_X



i) Izračunamo D_{AB}^{orto}.

ii) Izračunamo kot β (sinusni izrek):

$$\sin\beta = \frac{\sin\Delta\lambda\sin(90° - \varphi_A)}{\sin D_{AB}^{orto}}$$

iii) Izračunamo φ_X (kotangensni izrek):

$$\cot(90° - \varphi_X) = \frac{\cos(90° - \varphi_B)\cos\Delta\lambda_X + \sin\Delta\lambda_X\cot\beta}{\sin(90° - \varphi_B)}$$

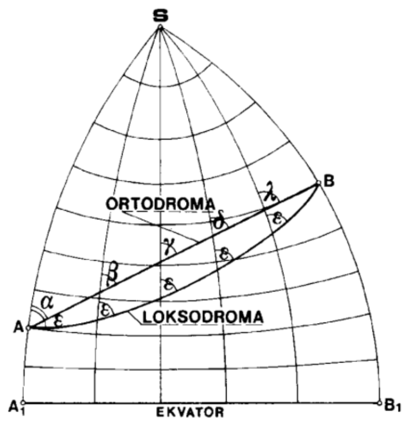
kjer je:

$$\Delta\lambda_X = |\lambda_B - \lambda_X|$$

4 LOKSODROMA

Loksodroma je pot med dvema točkama, ki vse meridiane seka pod enakim kotom. Plovilu/letalu, ki potuje po loksodromi, ni potrebno spreminjati kurza poti.

dano: začetna točka $A(\varphi_A, \lambda_A)$, končna točka $B(\varphi_B, \lambda_B)$
iščemo: D_{AB}^{lokso}, α



Loksodroma ni lok velikega kroga, zato ne moremo uporabiti enačb sferne trigonometrije. Azimut loksodrome (smer poti oziroma kurz) α (na zgornji skici označen z ε) izračunamo kot:

$$\cot\alpha = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_A)\frac{\pi}{180°}} \ln\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)}\right)$$

Za končni izračun azimuta je potrebno določiti še njegov kvadrant:

$\boldsymbol{\lambda_A - \lambda_B}$	$\boldsymbol{\cot\alpha}$	**kvadrant**	$\boldsymbol{\alpha}$
$-$	$+$	I. kvadrant	α
$-$	$-$	II. kvadrant	$\alpha + 180°$
$+$	$+$	III. kvadrant	$\alpha + 180°$
$+$	$-$	IV. kvadrant	$\alpha + 360°$

Dolžino loksodrome v dolžinskih enotah izračunamo kot:

$$D_{AB}^{loks} = R\frac{(\varphi_B - \varphi_A)}{\cos\alpha}\frac{\pi}{180°}$$

Kraji na loksodromi

dano: $A(\varphi_A, \lambda_A), B(\varphi_B, \lambda_B), \lambda_X$
iščemo: φ_X

i) Izračunamo azimut (kurz) loksodrome α.
ii) Iz enačbe za izračun azimuta loksodrome izpeljemo enačbo za φ_X:

$$\varphi_X = 2[\arctan(e^{\mu}) - 45°]$$

kjer je μ:

$$\mu = \frac{|\lambda_B - \lambda_X| \frac{\pi}{180°}}{\tan\alpha} + \ln\left[\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)\right]$$