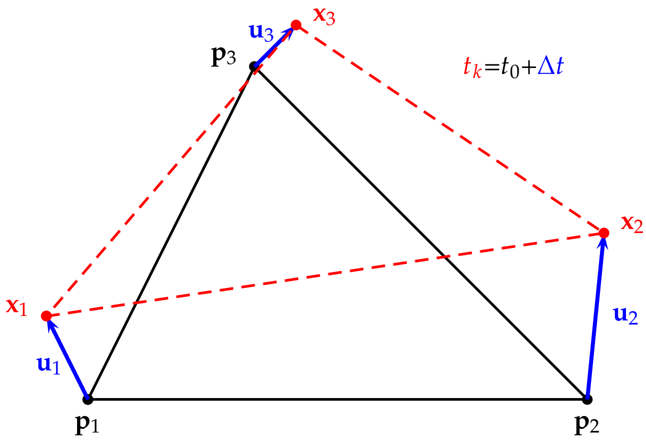
VAJA 1 – 2. DEL: GEODINAMIKA – HOMOGENE DEFORMACIJE V RAVNINI TER GLAVNE NORMALNE IN STRIŽNE DEFORMACIJE

2024/2025

1 HOMOGENE DEFORMACIJE V RAVNINI

Obravnavamo trikotnik, kjer se njegova oglišča (tj. geodetske točke) premikajo v odvisnosti od časa in je ta premik linearen (konstantna vrednost vektorja hitrosti). Položaji vseh treh točk ob začetnem času t_0 so podani s $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$, ob poljubnem končnem času t_k pa z $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ in $\mathbf{x}_3$, kot prikazuje slika 1.



Slika 1: Homogene deformacije trikotnika

V časovnem intervalu $\Delta t = t_k - t_0$ točke opravijo pot $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ in $\mathbf{u}_3$, ki se z vektorji hitrosti $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{v}_3$ izrazijo kot:

$$\mathbf{u}_1 = \Delta t \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \Delta t \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{u}_3 = \Delta t \mathbf{v}_3 \tag{1}$$

Če za časovni interval Δt vzamemo točno eno leto ($\Delta t = 1$), potem iz enačbe (1) sledi $\mathbf{u_i} = \mathbf{v_i}$ ($i = \{1, 2, 3\}$)[1]. S slike 1 je razvidno, da se zaradi spreminjanja položaja vseh treh točk, trikotnik lahko premakne, zasuka ter spremeni obliko in velikost (deformira).

Položaje točk ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$) v trenutku t_0 in položaje točk ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ in $\mathbf{x}_3$) v trenutku $t_k = t_0 + \Delta t$ lahko obravnavamo kot zapisa položaja v dveh koordinatnih sistemih – KS_p in KS_x. Posledično jih lahko povežemo z ravninsko transformacijo. Če bi uporabili ravninsko podobnostno transformacijo (Helmertova transformacija), imamo na voljo 4 parametre (dva premika, zasuk in sprememba merila), pri čemer pa ne upoštevamo možnost spremembe oblike trikotnika (deformacije trikotnika). Naše zahteve izpolni afina

[1]Seveda ob predpostavki, da so vektorji hitrosti podani v enotah [dolžinska enota/leto].

transformacija. Za vsako točko trikotnika nastavimo enačbo afine transformacije kot:

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{p_i} + \mathbf{v_i} = \mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{p_i} \qquad i = \{1, 2, 3\} \tag{2}$$

kjer sta v enačbi (2) vektor **t** in matrika **A** določena kot:

$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ – vektor premika trikotnika $\qquad$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – matrika transformacije

Enačba (2) vsebuje 6 parametrov transformacije in jo lahko zapišemo kot:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{x_i}} = \overbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}}^{\mathbf{t}} + \overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{p_i}} \tag{3}$$

Enačba (3) opisuje afino transformacijo med dvema koordinatnima sistemoma (KS_p in KS_x). Če elemente matrike **A** zapišemo kot:

$a = 1 + \varepsilon_{xx}$

$d = 1 + \varepsilon_{yy}$

$b = \varepsilon_{xy} + \omega$

$c = \varepsilon_{xy} - \omega,$

potem enačbo (3) zapišemo v obliki:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{x_i}} = \overbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}}^{\mathbf{t}} + \left(\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{I}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}}^{\varepsilon} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}^{\omega} \right) \overbrace{\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{p_i}} \tag{4}$$

Če upoštevajmo še, da so razlike v položajih ravno vektorji hitrosti (glej enačbo (2)), dobimo enačbo:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix}}^{\mathbf{v_i}} = \overbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}}^{\mathbf{t}} + \left(\overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}}^{\varepsilon} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}^{\omega} \right) \overbrace{\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{p_i}} \tag{5}$$

oziroma vektorsko:

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{t} + (\varepsilon + \omega)\,\mathbf{p_i} \qquad i = \{1, 2, 3\} \tag{6}$$

Enačbi (5) in (6) povezujeta vse tri vektorje hitrosti ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{v}_3$) s parametri homogenih deformacij, ki so:

t – vektor premika trikotnika v enem letu (parametra translacije), kar dejansko predstavlja srednjo vrednost vektorja hitrosti celega trikotnika (enote: [m/leto]),

ε – tenzor malih deformacij trikotnika, ki vsebuje:

ε_{xx} – sprememba merila (dolžin) v smeri osi x (enote: [1/leto]),

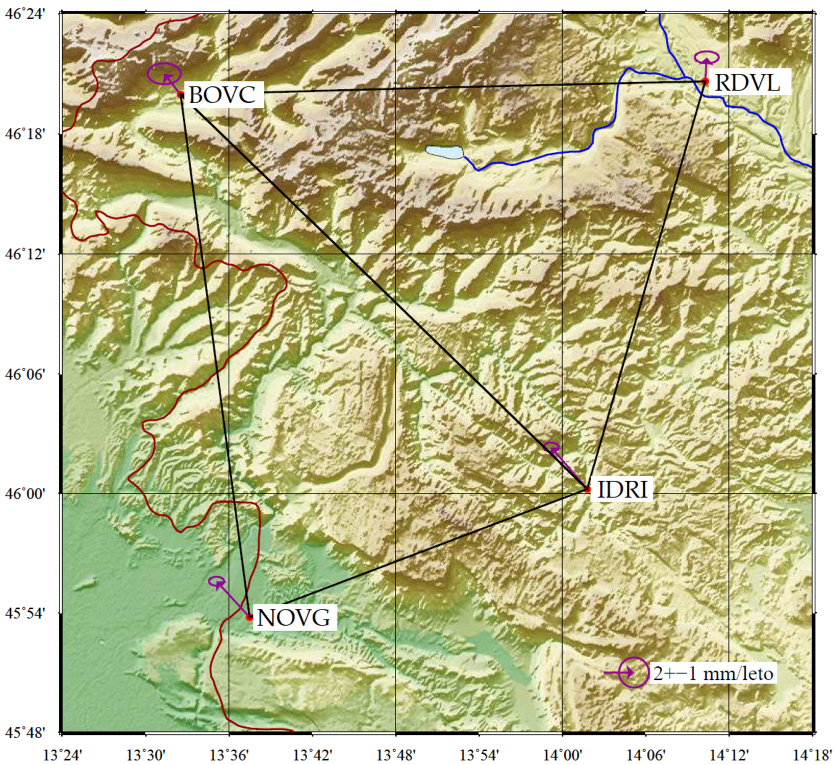
ε_{yy} – sprememba merila (dolžin) v smeri osi y (enote: [1/leto]) in

ε_{xy} – mera za spremembo pravega kota koordinatnih osi po transformaciji (oz. deformaciji) (enote: [1/leto]) ter

ω – tenzor malih zasukov v trikotnika, ki je določen z malim kotom zasuka ω (enote: [1/leto]).

2 NALOGA 1 – HOMOGENE DEFORMACIJE

Rezultat 1. dela vaje 1 so izračunani vektorji hitrosti štirih točk (BOVC, IDRI, NOVG in RDVL) s pripadajočimi natančnostmi. Slika 2 prikazuje vektorje hitrosti v horizontalni ravnini za vsako točko.



Slika 2: Horizontalni vektorji hitrosti in njihove natančnosti za štiri GNSS postaje omrežja SIGNAL

Sestavite dva trikotnika kot prikazuje slika 2 in za oba trikotnika izračunajte parametre deformacij (t_x, t_y, ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}, ω) s pripadajočimi natančnostmi Predpostavite, da so deformacije homogene.

OPOMBA: V poglavju 1 se vse enačbe nanašajo na matematični koordinatni sistem – os x je abscisa, os y pa ordinata. Za državni ravninski koordinatni sistem velja: $x \rightarrow e$, $y \rightarrow n$.

3 GLAVNE NORMALNE IN STRIŽNE DEFORMACIJE

Deformacije lahko, neodvisno od koordinatnega sistema, predstavimo z glavnimi normalnimi in glavnimi strižnimi deformacijami. Glavne normalne deformacije predstavljajo ekstremne vrednosti (najmanjšo in največjo) normalnih deformacij, glavne strižne deformacije pa predstavljajo ekstremne vrednosti strižnih deformacij. Glavne normalne deformacije poiščemo preko lastnih vrednosti tenzorja majhnih deformacij ε, smeri glavnih normalnih deformacij (v koordinatnem sistemu, na katerega se nanaša tenzor majhnih deformacij) pa preko lastnih vektorjev tenzorja ε. Lastne vrednosti oziroma vrednosti glavnih normalnih deformacij izračunamo po enačbi:

$$\varepsilon_{N_{1,2}} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \tag{7}$$

Glavni normalni deformaciji se zgodita v smereh α_{N_1} in α_{N_2}:

$$\tan 2\alpha_{N_1} = \frac{2\ \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \qquad \alpha_{N_2} = \alpha_{N_1} + 90^\circ \tag{8}$$

Glavni strižni deformaciji ε_{S_1} in ε_{S_1} imata vrednost:

$$\varepsilon_{S_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \tag{9}$$

in se zgodita v smereh α_{S_1} in α_{S_2}:

$$\tan 2\alpha_{S_1} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\ \varepsilon_{xy}} \qquad \alpha_{S_2} = \alpha_{S_1} + 90^\circ \tag{10}$$

Iz enačb (8) in (10) sledi (preverite sami), da je:

$$\alpha_{S_1} = \alpha_{N_1} - 45^\circ \tag{11}$$

4 NALOGA 2 – GLAVNE NORMALNE IN STRIŽNE DEFORMACIJE

Rezultat naloge 1 so izračunani parametri homogenih deformacij s pripadajočimi natančnostmi. Za oba obravnavana trikotnika iz pripadajočega tenzorja malih deformacij ε izračunajte:

- glavni normalni deformaciji ε_{N_1} in ε_{N_2} s pripadajočima smerema α_{N_1} in α_{N_2} ter
- glavni strižni deformaciji ε_{S_1} in ε_{S_1} s pripadajočima smerema α_{S_1} in α_{S_2}.