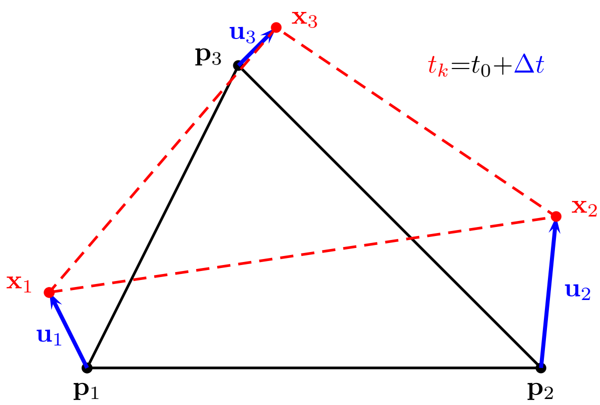
VAJA 1 – DEL 2: HOMOGENE DEFORMACIJE V RAVNINI PROJEKCIJE

2021/2022

1 PRINCIP HOMOGENIH DEFORMACIJ

Obravnavamo trikotnik, kjer se oglišča trikotnika (geodetske GNSS-točke) premikajo v odvisnosti od časa in je ta premik linearen (konstantna vrednost vektorja hitrosti). Položaji vseh treh točk ob začetnem času t_0 so podani s $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$, ob poljubnem končnem času t_k pa z $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ in $\mathbf{x}_3$, kot prikazuje slika 1.



Slika 1: Homogene deformacije trikotnika

V časovnem intervalu $\Delta t = t_k - t_0$ točke opravijo pot $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ in $\mathbf{u}_3$, ki se z vektorji hitrosti $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{v}_3$ izrazijo kot:

$$\mathbf{u}_1 = \Delta t \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \Delta t \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{u}_3 = \Delta t \mathbf{v}_3 \tag{1}$$

Če za časovni interval Δt vzamemo točno eno leto ($\Delta t = 1$), potem iz enačbe (1) sledi $\mathbf{u_i} = \mathbf{v_i}$ ($i = \{1, 2, 3\}$). Iz slike 1 je razvidno, da se, zaradi spreminjanja položaja vseh treh točk, trikotnik lahko:

- premakne,
- zasuka,
- spremeni obliko in velikost (deformira).

Položaje točk v trenutku t_0 ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$) in položaje točk v trenutku $t_k = t_0 + \Delta t$ ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ in $\mathbf{x}_3$) lahko obravnavamo kot zapisa položaja v dveh koordinatnih sistemih – KS_p in KS_x. Posledično jih lahko povežemo z ravninsko transformacijo. Če bi uporabili ravninsko podobnostno transformacijo (Helmertova transformacija), imamo na voljo 4 parametre (dva premika, zasuk in sprememba merila), pri čemer pa ne upoštevamo možnost spremembe oblike trikotnika (deformacije trikotnika). Naše zahteve izpolni afina transformacija. Za vsako točko trikotnika nastavimo enačbo afine transformacije kot:

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{p_i} + \mathbf{v_i} = \mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{p_i} \qquad i = \{1, 2, 3\} \tag{2}$$

kjer sta v enačbi (2) vektor $\mathbf{t}$ in matrika $\mathbf{A}$ določena kot:

$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ – vektor premika trikotnika in

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – matrika transformacije.

Enačba (2) vsebuje 6 parametrov transformacije in jo lahko zapišemo kot:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{x_i}} = \overbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}}^{\mathbf{t}} + \overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{p_i}} \tag{3}$$

Enačba (3) opisuje afino transformacijo med dvema koordinatnima sistemoma (KS_p in KS_x). Če elemente matrike $\mathbf{A}$ zapišemo kot:

$a = 1 + \varepsilon_{xx}$

$d = 1 + \varepsilon_{yy}$

$b = \varepsilon_{xy} + \omega$

$c = \varepsilon_{xy} - \omega,$

potem enačbo (3) zapišemo v obliki:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{x_i}} = \overbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}}^{\mathbf{t}} + \left(\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{I}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}}^{\varepsilon} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}^{\omega} \right) \overbrace{\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{p_i}} \tag{4}$$

Če upoštevajmo še, da so razlike v položajih ravno vektorji hitrosti (glej enačbo (2)), dobimo enačbo:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix}}^{\mathbf{v_i}} = \overbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}}^{\mathbf{t}} + \left(\overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}}^{\varepsilon} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}^{\omega} \right) \overbrace{\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}}^{\mathbf{p_i}} \tag{5}$$

oziroma vektorsko:

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{t} + (\varepsilon + \omega)\,\mathbf{p_i} \qquad i = \{1, 2, 3\} \tag{6}$$

Enačbi (5) in (6) povezujeta vse tri vektorje hitrosti ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{v}_3$) s parametri homogenih deformacij, ki so:

t – vektor premika trikotnika v enem letu (parametra translacije), kar dejansko predstavlja srednjo vrednost vektorja hitrosti celega trikotnika (enote: [m/leto]),

ε - tenzor malih deformacij trikotnika, ki vsebuje:

ε_{xx} – sprememba merila (dolžin) v smeri osi x (enote: [1/leto]),

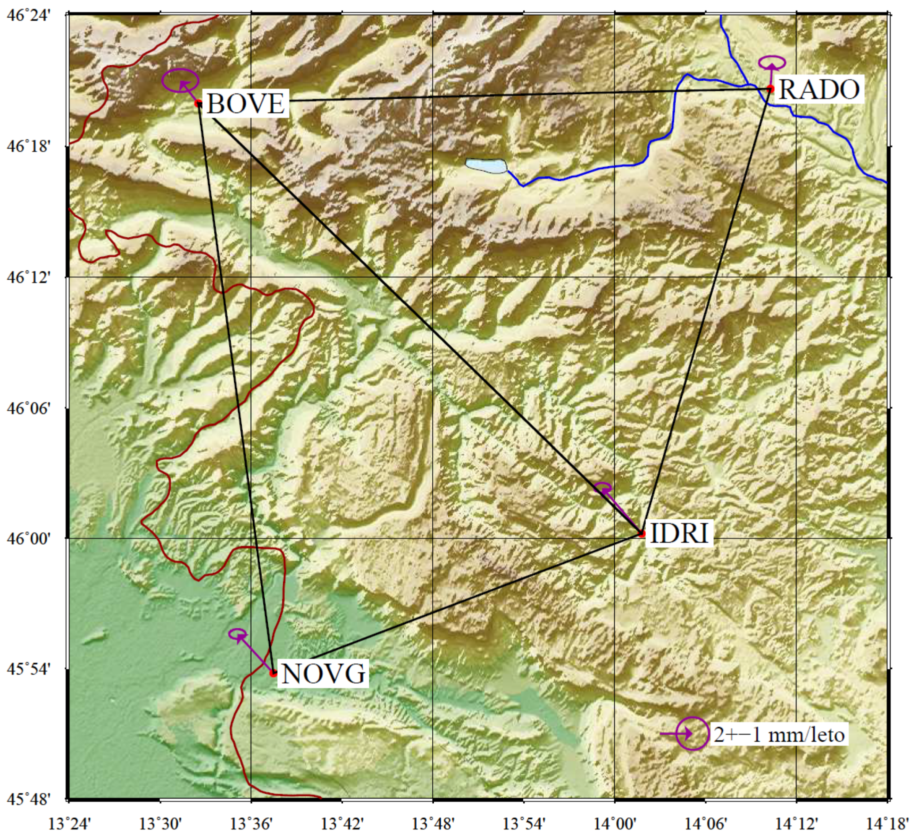
ε_{yy} – sprememba merila (dolžin) v smeri osi y (enote: [1/leto]) in

ε_{xy} – mera za spremembo pravega kota koordinatnih osi po transformaciji (oz. deformaciji) (enote: [1/leto]) ter

ω – tenzor malih zasukov v trikotnika, ki je določen z malim kotom zasuka ω (enote: [1/leto]).

2 NALOGA

Rezultat 1. dela vaje so izračunani vektorji hitrosti štirih točk (BOVE, IDRI, NOVG in RADO) s pripadajočimi natančnostmi. Slika 2 prikazuje vektorje hitrosti v horizontalni ravnini za vsako točko.



Slika 2: Geodetske točke GNSS s pripadajočimi vektorji hitrosti v ravnini in pripadajočimi natančnostmi

Sestavite dva trikotnika kot prikazuje slika 2 in za oba trikotnika izračunajte parametre deformacij (t_x, t_y, ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}, ω) s pripadajočimi natančnostmi, če za vsak trikotnik predpostavite, da so deformacije homogene.

OPOMBA: V poglavju 1 se vse enačbe nanašajo na matematični koordinatni sistem – x-os je abscisa, y-os pa ordinata. Za ravninski geodetski koordinatni sistem velja: $x \rightarrow e$, $y \rightarrow n$.