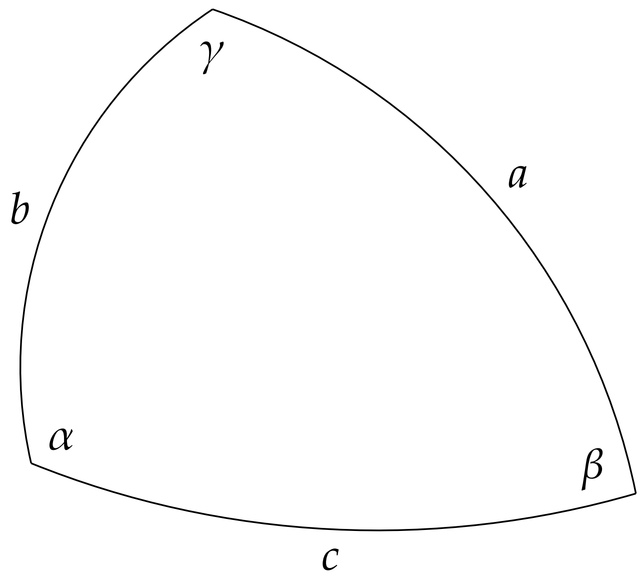
GEODEZIJA – PRVI DEL – VAJE

VAJA 9: SFERNA TRIGONOMETRIJA

2024/2025

1 SPLOŠNI SFERNI TRIKOTNIK



Kosinusni izrek za stranice

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Kosinusni izrek za kote

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$
$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Sinusni izrek

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Kotangensni izrek

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot \alpha \sin \gamma$$
$$\cot b \sin c = \cos c \cos \alpha + \cot \beta \sin \alpha$$
$$\cot c \sin b = \cos b \cos \alpha + \cot \gamma \sin \alpha$$
$$\cot a \sin c = \cos c \cos \beta + \cot \alpha \sin \beta$$
$$\cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$$
$$\cot c \sin a = \cos a \cos \beta + \cot \gamma \sin \beta$$

Napierjeve enačbe (analogije)

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} \qquad \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{a-c}{2}}{\cos \frac{a+c}{2}} \cot \frac{\beta}{2} \qquad \tan \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{a-c}{2}}{\sin \frac{a+c}{2}} \cot \frac{\beta}{2}$$

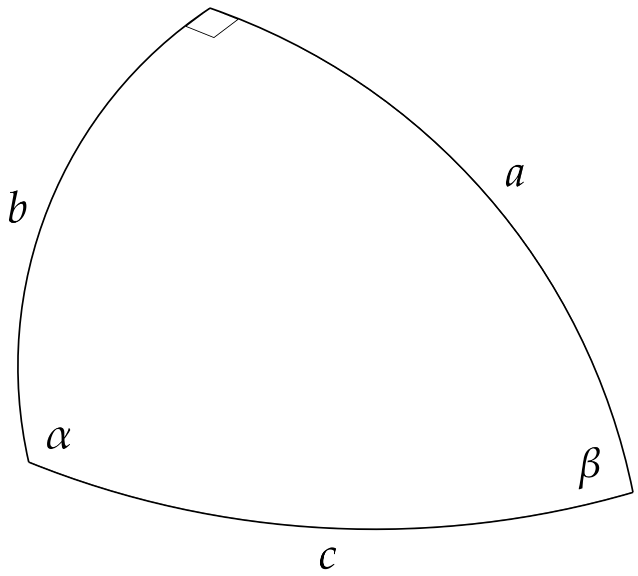
$$\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}} \cot \frac{\alpha}{2} \qquad \tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$

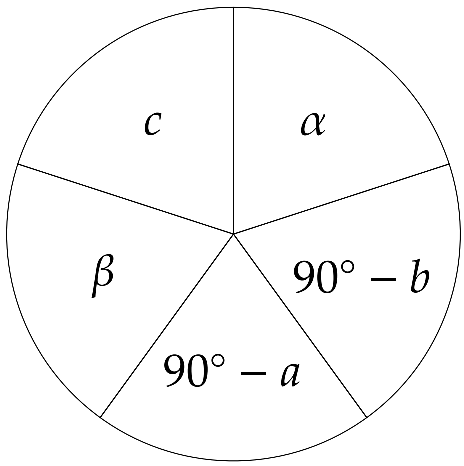
$$\tan \frac{a + b}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2} \qquad \tan \frac{a - b}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2}$$

$$\tan \frac{a + c}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha+\gamma}{2}} \tan \frac{b}{2} \qquad \tan \frac{a - c}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha+\gamma}{2}} \tan \frac{b}{2}$$

$$\tan \frac{b + c}{2} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} \tan \frac{a}{2} \qquad \tan \frac{b - c}{2} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}} \tan \frac{a}{2}$$

2 PRAVOKOTNI SFERNI TRIKOTNIK





Napierjevo pravilo

Kosinus izbranega elementa v "krogu" (shema zgoraj desno) je enak:

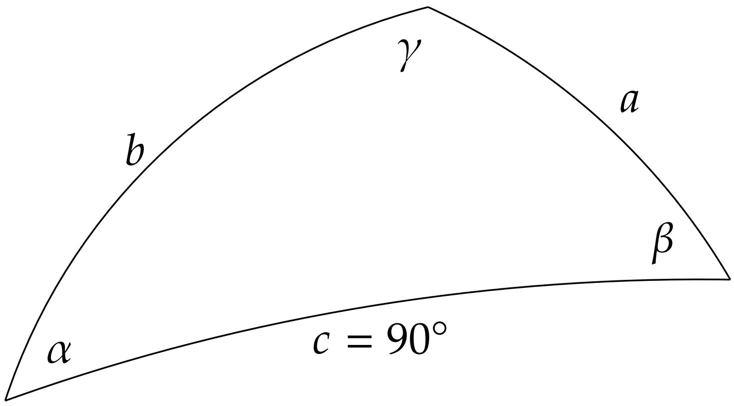
i) produktu **kotangensov** sosednjih elementov,

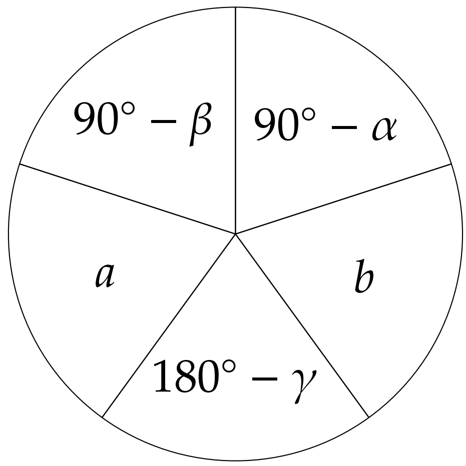
ii) produktu **sinusov** nasprotnih elementov.

Osnovna oblika izraza	**Poenostavljena oblika izraza**
$\cos c = \cot\beta \cot\alpha$	$\cos c = \cot\beta \cot\alpha$
$\cos c = \sin(90^\circ - a)\sin(90^\circ - b)$	$\cos c = \cos a \cos b$
$\cos\alpha = \cot c \cot(90^\circ - b)$	$\cos\alpha = \cot c \tan b$
$\cos\alpha = \sin\beta \sin(90^\circ - \alpha)$	$\cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha$
$\cos(90^\circ - b) = \cot\alpha \cot(90^\circ - a)$	$\sin b = \cot\alpha \tan a$
$\cos(90^\circ - b) = \sin c \sin\beta$	$\sin b = \sin c \sin\beta$
$\cos(90^\circ - a) = \cot(90^\circ - b)\cot\beta$	$\sin a = \tan b \cot\beta$
$\cos(90^\circ - a) = \sin\alpha \sin c$	$\sin a = \sin\alpha \sin c$
$\cos\beta = \cot(90^\circ - a)\cot c$	$\cos\beta = \tan a \cot c$
$\cos\beta = \sin(90^\circ - b)\sin\alpha$	$\cos\beta = \cos b \sin\alpha$

OPOMBA: Vsi poldnevniki sekajo ekvator pod pravim kotom.

3 PRAVOSTRANIČNI SFERNI TRIKOTNIK





Napierjevo pravilo

Kosinus izbranega elementa v "krogu" (shema zgoraj desno) je enak:

i) produktu **kotangensov** sosednjih elementov,

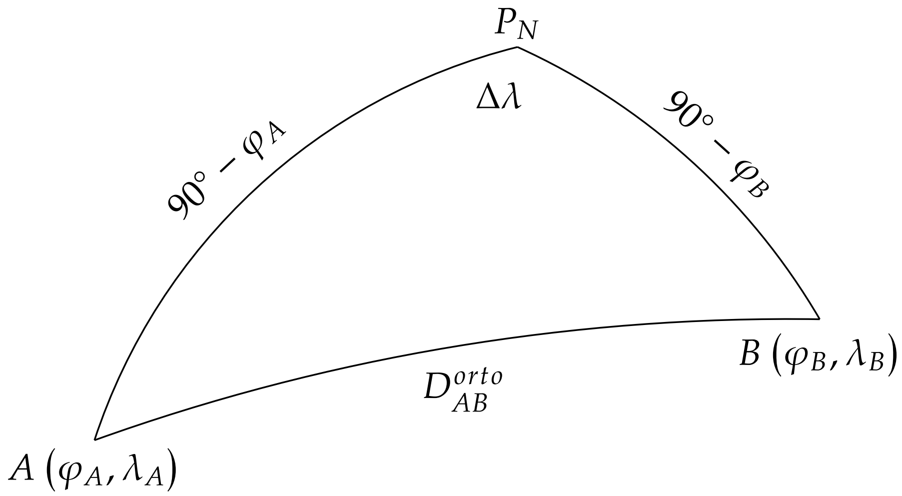
ii) produktu **sinusov** nasprotnih elementov.

Osnovna oblika izraza	**Poenostavljena oblika izraza**
$\cos(90° - \alpha) = \cot(90° - \beta)\cot b$	$\sin\alpha = \tan\beta\cot b$
$\cos(90° - \alpha) = \sin a \sin(180° - \gamma)$	$\sin\alpha = \sin a \sin\gamma$
$\cos b = \cot(90° - \alpha)\cot(180° - \gamma)$	$\cos b = -\tan\alpha\cot\gamma$
$\cos b = \sin(90° - \beta)\sin a$	$\cos b = \cos\beta\sin a$
$\cos(180° - \gamma) = \cot b \cot a$	$\cos\gamma = -\cot b\cot a$
$\cos(180° - \gamma) = \sin(90° - \alpha)\sin(90° - \beta)$	$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta$
$\cos a = \cot(180° - \gamma)\cot(90° - \beta)$	$\cos a = -\cot\gamma\tan\beta$
$\cos a = \sin b \sin(90° - \alpha)$	$\cos a = \sin b\cos\alpha$
$\cos(90° - \beta) = \cot a \cot(90° - \alpha)$	$\sin\beta = \cot a\tan\alpha$
$\cos(90° - \beta) = \sin(180° - \gamma)\sin b$	$\sin\beta = \sin\gamma\sin b$

4 ORTODROMA

Ortodroma oziroma geodetska linija je najkrajša razdalja med dvema točkama na krogli. Ortodroma je krajši lok velikega kroga skozi izbrani točki na površju krogle. Kot pot plovbe/leta ni primerna, saj bi moralo plovilo/letalo za pot po ortodromi stalno spreminjati smer (kurz) plovbe/leta.

dano: začetna točka $A\left(\varphi_A, \lambda_A\right)$, končna točka $B\left(\varphi_B, \lambda_B\right)$
iščemo: D_{AB}^{orto}



Dolžino ortodrome v kotnih enotah izračunamo z uporabo kosinusnega izrek za stranice:

$$\cos D_{AB}^{orto} = \cos\left(90° - \varphi_A\right)\cos\left(90° - \varphi_B\right) + \sin\left(90° - \varphi_A\right)\sin\left(90° - \varphi_B\right)\cos\Delta\lambda \tag{1}$$

kjer je:

$$\Delta\lambda = \left|\lambda_B - \lambda_A\right| \tag{2}$$

Če enačbo (1) poenostavimo, dobimo:

$$\cos D_{AB}^{orto} = \sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos\Delta\lambda \tag{3}$$

Dolžino ortodrome v dolžinskih enotah na krogli s polmerom R izračunamo kot:

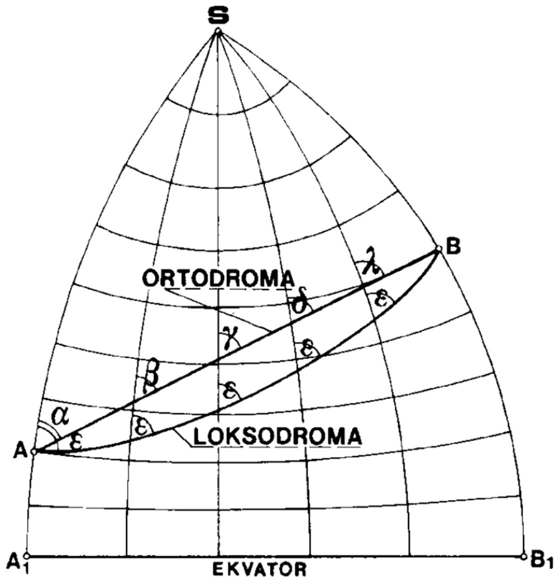
$$D_{AB}^{orto}[\mathrm{m}] = R \cdot D_{AB}^{orto}[°] \cdot \frac{\pi}{180°} \tag{4}$$

OPOMBA: Poldnevniki so veliki krogi → loki poldnevnikov so torej ortodrome. Vzporedniki so mali krogi (razen ekvator) → loki vzporednikov NISO ortodrome (razen loki ekvatorja).

5 LOKSODROMA

Loksodroma je pot med dvema točkama, ki vse meridiane seka pod enakim kotom. Plovilu/letalu, ki potuje po loksodromi, ni potrebno spreminjati smeri (kurza) plovbe/leta.

dano: začetna točka $A\left(\varphi_A, \lambda_A\right)$, končna točka $B\left(\varphi_B, \lambda_B\right)$
iščemo: D_{AB}^{lokso}, α



Loksodroma ni lok velikega kroga, zato ne moremo uporabiti enačb sferne trigonometrije. Azimut loksodrome (smer poti oziroma kurz) α (na zgornji skici označen z ϵ) izračunamo kot:

$$\cot\alpha = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_A)\,\frac{\pi}{180^\circ}} \ln\left(\frac{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2}\right)}\right) \tag{5}$$

Za končni izračun azimuta je potrebno določiti še njegov kvadrant:

$\lambda_A - \lambda_B$	$\cot\alpha$	kvadrant	α
−	+	I. kvadrant	α
−	−	II. kvadrant	$\alpha + 180^\circ$
+	+	III. kvadrant	$\alpha + 180^\circ$
+	−	IV. kvadrant	$\alpha + 360^\circ$

Dolžino loksodrome v dolžinskih enotah izračunamo kot:

$$D_{AB}^{lokso} = R\frac{\left(\varphi_B - \varphi_A\right)}{\cos\alpha}\frac{\pi}{180^\circ} \tag{6}$$

OPOMBA: Če potujemo po poldnevniku, se kurz poti ne spreminja → loki poldnevnikov so torej loksodrome (in hkrati ortodrome). Če potujemo po vzporedniku, se kurz poti ne spreminja → loki vzporednikov so loksodrome.