VAJA 6: APROKSIMACIJA LOKALNE VIŠINSKE REFERENČNE PLOSKVE Z RAVNINO

2025/2026

1 UVOD

V primeru, da je na nekem območju državna višinska referenčna ploskev preslabe kakovosti za našo nalogo, moramo vzpostaviti lokalno višinsko referenčno ploskev ustrezne kakovosti. V ta namen točkam, ki so enakomerno razporejene po obravnavanem območju, z geometričnim nivelmanom ali trigonometričnim višinomerstvom določimo nadmorsko višino H, z GNSS izmero pa elipsoidno višino h. Iz dobljenih (kvazi)geoidnih višin točk $N = h - H$ lahko lokalno višinsko referenčno ploskev aproksimiramo z ravnino:

$$N = A\,e' + B\,n' + C \tag{1}$$

kjer je:

- N ... (kvazi)geoidna višina [m],
- e' ... e koordinata točke, reducirana na težišče mreže [m],
- n' ... n koordinata točke, reducirana na težišče mreže [m],
- A ... naklonski koeficient ravnine v smeri koordinatne osi e, tj. v smeri vzhod-zahod [rad],
- B ... naklonski koeficient ravnine v smeri koordinatne osi n, tj. v smeri sever-jug [rad],
- C ... geoidna višina težišča mreže [m].

2 PODATKI

Podane imate podatke za dve delovišči, Krvavec in Kras. Za obe delovišči imate podane ravninske koordinate točk v državnem koordinatnem sistemu D96/TM, elipsoidne višine nad elipsoidom GRS 80 in nadmorske (normalne ortometrične) višine v starem državnem višinskem sistemu SVS2000.

Podatki za delovišče Krvavec so v datoteki `Krvavec-D96TM-SVS2000.txt`, za delovišče Kras pa v datoteki `Kras-D96TM-SVS2000.txt`.

3 NALOGA

Pri vaji bomo obravnavali potek geoida pod Kamniško-Savinjskimi Alpami, od Cerkelj na Gorenjskem do Krvavca in na območju Krasa v okolici Sežane. Vaša naloga je, da naredite aproksimacijo ploskve geoida z ravnino za obe obravnavani območji. Potrebne podatke najdete v datoteki `FG-V06-podatki.7z`.

4 REZULTATI

Rezultati vaje naj vsebujejo (za vsako obravnavano območje):

- skico danih točk na kartografski podlagi;
- z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov ocenjene parametre lokalne ploskve geoida, ki jo aproksimirate z ravnino, tj. koeficiente A, B in C, ter njihove natančnosti;
- nove geoidne višine danih točk, izračunane na podlagi ocenjene lokalne višinske referenčne ploskve;
- oceno kakovosti dobljene lokalne višinske referenčne ploskve na osnovi razlik med opazovanimi in izravnanimi geoidnimi višinami na danih točkah;
- vrednost (v kotnih sekundah in v mm/km) in smer maksimalnega naklona ocenjene ravnine;
- primerjavo med geoidnimi višinami, dobljenimi s terensko izmero, geoidnimi višinami, dobljenimi iz lokalne višinske referenčne ploskve in geoidnimi višinami, dobljenimi iz državne višinske referenčne ploskve SLO_AMG2000/Trst.

V poročilu predstavite tudi geometrični pomen koeficientov A, B in C.

V spletno učilnico oddajte kratko poročilo z rezultati vaje v obliki datoteke PDF, ki naj bo poimenovana `FG-V06-Priimek_Ime.pdf`.

Rok za oddajo: 19. 5. 2026

5 POMOČ

5.1 Redukcija koordinat na težišče mreže

Koordinate točk reduciramo na težišče mreže zaradi numerične stabilnosti matematičnega modela izravnave po MNK. Z redukcijo koordinat na težišče mreže pridobi tudi koeficient C ravnine lokalne višinske referenčne ploskve smiseln pomen – predstavlja (kvazi)geoidno višino težišča mreže. Koordinate težišča mreže $T^*(e^*, n^*)$ izračunamo po enačbah:

$$e^* = \frac{1}{k}\sum_{i=i}^{k} e_i \qquad\qquad n^* = \frac{1}{k}\sum_{i=i}^{k} n_i \qquad (2a, 2b)$$

kjer je k število točk v mreži.

Koordinate posamezne točke reduciramo na težišče mreže po enačbah:

$$e'_i = e_i - e^* \qquad\qquad n'_i = n_i - n^* \qquad (3a, 3b)$$

5.2 Izravnava ravnine po MNK – posredni model izravnave

Izhajamo iz enačbe ravnine:

$$N - A\,e' - B\,n' - C = 0 \tag{4}$$

Za $u = n_0 = 3$ neznanke imamo $n = k$ enačb popravkov opazovanj (k – število točk v mreži), oblike:

$$F_i \equiv \hat{N}_i - \hat{A}\,e'_i - \hat{B}\,n'_i - \hat{C} = 0 \tag{5}$$

Matrika **B** vsebuje odvode enačb popravkov opazovanj po neznankah:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -e'_1 & -n'_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -e'_k & -n'_k & -1 \end{bmatrix}_{k\times 3} \tag{6}$$

Ker imamo za obravnavani primer linearen matematični model, so elementi vektorja neznank $\boldsymbol{\Delta}$ kar neznani parametri ravnine, elementi vektorja $\mathbf{f}$ pa negativne vrednosti geoidnih višin v posameznih točkah:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ \vdots \\ -N_k \end{bmatrix}_{k\times 1} \tag{7, 8}$$

Matrika uteži naj bo kar enotska matrika, $\mathbf{P} = \mathbf{I}_k$.

Rešitev **funkcionalnega modela** (levo) in **stohastičnega modela** (desno) posredne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{P}\,\mathbf{B} \tag{9a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{P}\,\mathbf{f} \tag{9b}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{t} \tag{9c}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\,\boldsymbol{\Delta} \tag{9d}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \tag{9e}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{n - n_0} \tag{10a}$$

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Delta\Delta}} = \mathbf{N}^{-1} \tag{10b}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B}\,\mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathsf{T}} \tag{10c}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} \tag{10d}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Delta\Delta}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Delta\Delta}} \tag{10e}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{vv}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} \tag{10f}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} \tag{10g}$$

Ker ne poznamo referenčne variance a-priori σ_0^2, za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

5.3 Izračun maksimalnega naklona ravnine

Maksimalni naklon ravnine β_{max} izračunamo kot:

$$\beta_{max}[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}] = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{11a}$$

$$\beta_{max}[\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{km}}] = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 10^6 \tag{11b}$$

oziroma v kotnih enotah:

$$\beta_{max}[^\circ] = \arctan\sqrt{A^2 + B^2} \approx \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \rho^\circ \tag{12a}$$

$$\beta_{max}[''] = \arctan\sqrt{A^2 + B^2} \cdot 3600 \approx \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \rho'' \tag{12b}$$

kjer je ρ° pretvornik iz radianov v kotne stopinje, ρ'' pa pretvornik iz radianov v kotne sekunde. V zgornjih enačbah velja desna aproksimacija za primere majhnih kotov (kar naklonski koti ploskve geoida običajno so).

Smer maksimalnega naklona α izračunamo po enačbi:

$$\alpha = \arctan\frac{A}{B} \tag{13}$$

pri čemer upoštevamo *pravilo smernega kota* $\rightarrow \alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$.