

# VAJA 5: IZBOLJŠAVA GEOIDA Z UPORABO ODKLONOV NAVPIČNICE

2025/2026

## 1 UVOD

Poljubni točki lahko določimo geoidno višino z interpolacijo iz modela geoida. Če na lokalnem območju izbranim točkam z znanimi elipsoidnimi koordinatami  $(\varphi, \lambda)$  z natančnimi astro-geodetskimi opazovanji določimo še astronomske koordinate  $(\Phi, \Lambda)$ , lahko za te točke izračunamo komponente odklona navpičnice:

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (1a)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (1b)$$

Odklone navpičnice v obravnavanih točkah lahko nato uporabimo za lokalno izboljšavo geoida – izboljšavo izvedemo na podlagi razlik geoidnih višin med obravnavanimi točkami, ki jih izračunamo iz komponent odklonov navpičnice:

$$\Delta N_{ij} = N_j - N_i = - \left[ \frac{\xi_i + \xi_j}{2} (n_j - n_i) + \frac{\eta_i + \eta_j}{2} (e_j - e_i) \right] \quad (2)$$

kjer so:

- $\Delta N_{ij}$  ... razlika geoidnih višin med točkama  $i$  in  $j$ ,
- $N_j, N_i$  ... geoidni višini v točkah  $i$  in  $j$ ,
- $\xi_i, \xi_j$  ... komponenti odklona navpičnice v smeri sever–jug v točkah  $i$  in  $j$ ,
- $\eta_i, \eta_j$  ... komponenti odklona navpičnice v smeri vzhod–zahod v točkah  $i$  in  $j$
- $e_i, e_j, n_i, n_j$  ... koordinate točk  $i$  in  $j$  v državni kartografski projekciji.

Komponente odklonov navpičnice moramo v enačbo (2) obvezno vstaviti v radianih.

Na podlagi tako dobljenih razlik geoidnih višin lahko popravimo geoidne višine v obravnavanih točkah, dobljenih z interpolacijo iz modela geoida, ki ga želimo izboljšati. Pojavi pa se problem zagotovitve geodetskega datuma v postopku izravnave po MNK, saj je obravnavan problem s tega vidika ekvivalenten izravnavi nivelmana – “opazovane” višinske razlike nam ne zagotavljajo geodetskega datuma in moramo geodetski datum zagotoviti ali z minimalnim številom zunanjih vezi (navezava niveliranih višinskih razlik na reper z znano višino v primeru nivelmana oziroma, v obravnavanem primeru, navezava razlik geoidnih višin na eno iz modela geoida pridobljeno geoidno višino) ali z notranjimi vezmi (prosta mreža).

Neodvisno od zagotovitve geodetskega datuma lahko tako izboljšane geoidne višine uporabimo za izdelavo izboljšane lokalnega modela geoida (vaja 6).

## 2 PODATKI

V datoteki FG-V05-podatki.txt imate za točke po Sloveniji podane elipsoidne in astronomske koordinate, na podlagi katerih lahko izračunate komponenti odklona navpičnice v posamezni točki.

## 3 NALOGA

Na dodeljenem območju, za katerega imate podane štiri točke z znanimi astronomskimi in elipsoidnimi koordinatami, naredite izboljšavo modelov geoida SLO\_AMG2000/Trst, SLO\_VRP2016/Koper in EGM96. Za izračun geoidnih višin iz državnih modelov uporabite lasten program (vaja 3) ali spletno aplikacijo [SiTraNet<sup>1</sup>](#), za izračun geoidnih višin iz EGM96 pa že poznano [spletno aplikacijo<sup>2</sup>](#). Ker imamo v primeru uporabe štirih točk nadštevilna opazovanja, določite nove geoidne višine točk z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov, pri čemer geodetski datum zagotovite z notranjimi vezmi (prosta mreža).

## 4 REZULTATI

Rezultati vaje naj vsebujejo:

- izračunane odklone navpičnic (v enotah ["]) v štirih danih točkah,
- vrednosti geoidnih višin iz posameznih modelov geoidov v štirih danih točkah,
- rezultate izravnav za obravnavana modela geoidov (popravki vhodnih geoidnih višin in nove geoidne višine s pripadajočimi natančnostmi, ki jih izračunate na podlagi referenčne variance a-posteriori).

V spletno učilnico oddajte kratko poročilo z rezultati vaje v obliki datoteke PDF, ki naj bo poimenovana FG-V05-Priimek\_Ime.pdf.

**Rok za oddajo: 5. 5. 2026**

## 5 POMOČ

Ker imamo nadštevilna opazovanja, izvedemo izboljšavo (kvazi)geoida s posredno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov.  $k$ -to enačbo popravkov za "opazovano" razliko geoidnih višin  $\Delta N_{ij}$  med točkama  $i$  in  $j$  zapišemo kot:

$$F_k \equiv v_{ij} + \delta N_i - \delta N_j = (N_j^0 - N_i^0) - \Delta N_{ij} \quad (3)$$

kjer so:

- $v_{ij}$  ... popravek opazovane razlike geoidnih višin  $\Delta N_{ij}$ ,
- $N_i^0, N_j^0$  ... približni vrednosti neznank, tj. geoidni višini, pridobljeni iz izbranega modela geoida,
- $\delta N_i, \delta N_j$  ... popravka približnih vrednosti neznank  $N_i^0$  in  $N_j^0$ .

---

<sup>1</sup><http://sitranet.si/>

<sup>2</sup><http://geographiclib.sourceforge.net/cgi-bin/GeoidEval>

Geodetski datum zagotovimo z notranjimi vezmi (prosta mreža). Defekt datuma je ena ( $d = 1$ ), zato nastavimo eno vezno enačbo:

$$\sum_{i=1}^m \delta N_i = 0 \quad (4)$$

kjer je  $m$  število točk v izravnavi.

Opazovanjem, to so razlike geoidnih višin  $\Delta N_{ij}$ , dodelimo uteži, ki so obratno sorazmerne horizontalni dolžini  $d_{ij}$  med točkama  $i$  in  $j$ :

$$p_k = \frac{\bar{d}}{d_{ij}} \quad (5)$$

kjer je  $\bar{d}$  povprečna dolžina med obravnavanimi točkami.

Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave dobimo po enačbah:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\mathbf{\Delta} = (\mathbf{N} + \mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{\Delta}_0 + \mathbf{\Delta} \quad (8)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{\Delta} \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \quad (10)$$

Rešitev stohastičnega modela posredne izravnave dobimo po enačbah:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u + d} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = (\mathbf{N} + \mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} - \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B} (\mathbf{N} + \mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{B} (\mathbf{N} + \mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \quad (14)$$