

VAJA 2: GLOBALNI GEOPOTENCIALNI MODELI

2024/2025

1 UVOD

Z globalnimi geopotencialnimi modeli opišemo globalno gravitacijsko polje Zemlje. Gre za matematične funkcije, ki opisujejo gravitacijsko polje Zemlje v treh dimenzijah. Določitev globalnih geopotencialnih modelov je ena glavnih nalog geodezije, saj služijo kot referenčna osnova in nudijo pomembne informacije o Zemlji, njeni notranjosti in dogajanju na njej.

2 GRAVITACIJSKI POTENCIAL ZEMLJE

Gravitacijski potencial Zemlje izračunamo z enačbo:

$$V = G \iiint_{Zemlja} \frac{dm}{l} = G \iiint_{Zemlja} \frac{\rho}{l} dv \quad (1)$$

kjer so dm masa, ρ gostota in dv volumen masnega elementa ter l razdalja med masnim elementom in virom (točko) privlačnosti.

3 GLOBALNI GEOPOTENCIALNI MODELI

Globalni geopotencialni modeli služijo za izračun:

- težnostnega potenciala,
- geoidne višine,
- anomalij težnosti in
- gravitacijskih (in naprej težnostnih) anomalij.

Zgornje količine izračunamo glede na referenčno ploskev, ki je pri globalnih modelih običajno elipsoid GRS 80 (angl. *Geodetic Reference System 1980*). Izračun centrifugalnega dela težnostnega potenciala je enostavno, medtem ko je aproksimacija gravitacijskega dela težnostnega potenciala zelo zahtevna naloga. Za 3D-predstavitev gravitacijskega potenciala v obliki globalnih geopotencialnih modelov lahko uporabimo:

- elipsoidne harmonične funkcije,
- sferne radialno-bazične funkcije,
- sferne valčke ali
- sferne harmonične funkcije.

Med naštetimi možnostmi se najpogosteje uporabljajo sferne harmonične funkcije. Gre za niz ortogonalnih

rešitev Laplaceove enačbe:

$$\Delta V = 0 \quad (2)$$

kjer je V gravitacijski potencial, Δ pa Laplaceov operator. Globalni gravitacijski potencial predstavimo s sfernimi koordinatami in koeficienti. Gravitacijski potencial Zemlje V v poljubni točki (r, φ, λ) na ali nad Zemljo izračunamo s pomočjo vsote sfernih harmoničnih funkcij do določene stopnje razvoja (slika 1):

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{r}\right)^l P_{lm} \left(\sin \varphi (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) \right) \quad (3)$$

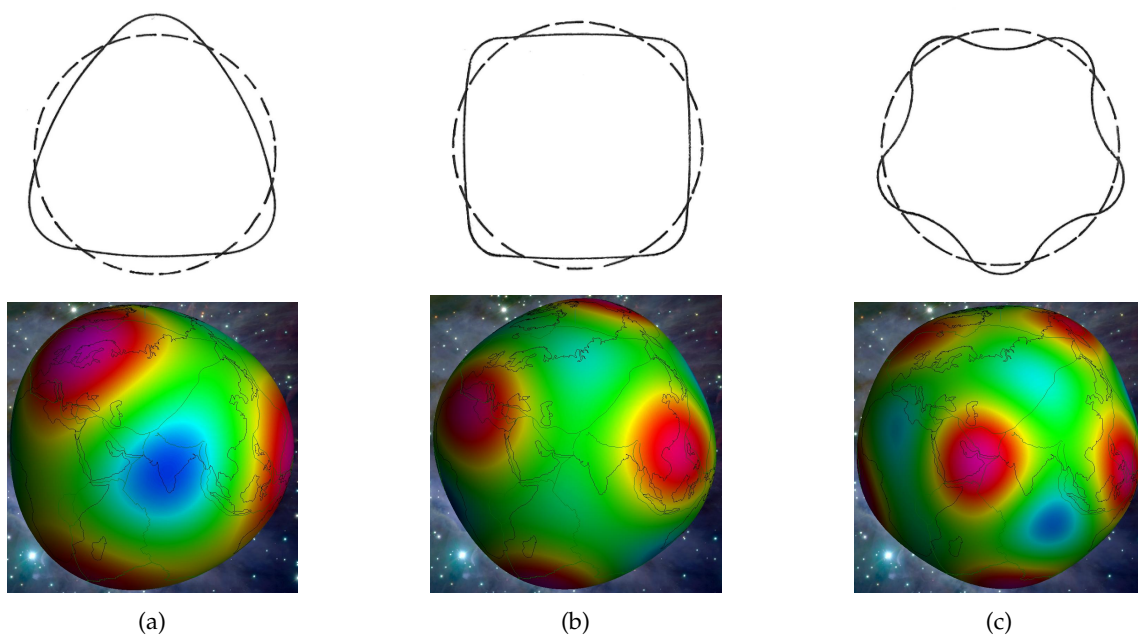
kjer so:

- r, φ, λ ... geocentrične koordinate na krogli za točko izračuna,
- R ... referenčni polmer Zemlje,
- GM ... produkt gravitacijske konstante in mase Zemlje,
- l, m ... stopnja in red sfernega harmoničnega koeficienta,
- P_{lm} ... Legendrove normalizirane funkcije,
- C_{lm}, S_{lm} ... Stokesovi normalizirani koeficienti.

Legendrove funkcije so normalizirane tako, da velja:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (P_{lm} \sin \varphi \cos(m\lambda))^2 d\lambda d\varphi = 1 \quad (4)$$

Določitev koeficientov C_{lm} in S_{lm} predstavlja enostavnejšo nalogo, kot rešitev enačbe (1) ob nepoznavanju razporeditve gostote zemeljskih mas. Neznane koeficiente lahko določimo na podlagi terestričnih in satelitskih gravimetričnih meritev ter satelitske altimetrije.



Slika 1: Grafična ponazoritev, kako posamezna stopnja harmoničnih koeficientov deformira kroglo ($l = 3$ (a), $l = 4$ (b) in $l = 5$ (c)). Končno obliko geoida dobimo s superpozicijo vseh členov razvoja.

4 PREDSTAVITEV GLOBALNIH GEOPOTENCIALNIH MODELOV

Globalni geopotencialni modeli so predstavljeni s (enačba 3):

- konstanto GM,
- polmerom Zemlje R,
- normaliziranimi Stokesovimi koeficienti C_{lm} in S_{lm} ter
- največjo stopnjo razvoja l_{max} .

l_{max} določa najkrajšo valovno dolžino, predstavljeno z modelom. Gre pravzaprav za ločljivost modela – če jo želimo povečati, moramo povečati tudi stopnjo razvoja funkcije.

5 NALOGE

5.1 Naloga 1: Izris sfernih funkcij

S pomočjo MATLAB-ovega programa GUI_SSH in [spletne aplikacije](#)¹ analizirajte izrise sfernih harmoničnih funkcij od stopnje (angl. *degree*) razvoja 0 do 360, pri čemer si korak izberite sami (npr. 10 ali 20). Za stopnjo razvoja 30 spreminjajte red (angl. *order*) razvoja od 1 do 30.

Rezultat naloge 1: Prikažite nekaj najbolj značilnih izrisov ter pojasnite, kaj pomeni spreminjanje stopnje in reda sfernih funkcij. Napišite tudi, kako *razrežemo* kroglo, če:

- je pri poljubni stopnji razvoja red razvoja enak 1,
- ob izbrani stopnji razvoja spreminjamo red razvoja,
- sta stopnja in red razvoja enaka?

5.2 Naloga 2: Izris globalnih geopotencialnih modelov ob različnih stopnjah razvoja

Na spletni strani <http://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/longtime> je dostopna aplikacija za vizualizacijo različnih globalnih modelov geoidov (izračunanih na podlagi globalnih geopotencialnih modelov) ob izbrani stopnji razvoja sfernih funkcijah. Poglejte si, kako stopnja razvoja vpliva na ločljivost modela. Do katere stopnje so izračunani koeficienti razvoja po sfernih funkcijah za posamezen globalni geopotencialni model, najdete tukaj: http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime.

Rezultat naloge 2: Šest vizualizacij modela EGM2008 ob različnih stopnjah razvoja :

- | | |
|-----------------------------|---|
| i) $5 < l_{max} < 10$, | iv) l_{max} = stopnja, do katere je razvit EGM96, |
| ii) $25 < l_{max} < 50$, | v) $500 < l_{max} < 1000$, |
| iii) $75 < l_{max} < 100$, | vi) l_{max} = stopnja, do katere je razvit EGM2008. |

¹<http://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/tutorial>

5.3 Naloga 3: Geoidne višine na različnih delih Zemlje

MATLAB-ov [Mapping Toolbox](#)² ponuja številna orodja za obdelavo in vizualizacijo geografskih podatkov. Izris geoidnih višin, izračunanih iz globalnega geopotencialnega modela EGM96, v Robinsonovi kartografski projekciji naredite z ukazi:

```
1 [geoid, geographic_reference] = egm96geoid;
2 load coastlines;
3 figure;
4 axesm robinson;
5 geoshow(geoid, geographic_reference, 'DisplayType', 'surface');
6 cb = colorbar('southoutside');
7 cb.Label.String = 'geoidna višina [m]';
8 geoshow(coastlat, coastlon, 'color', 'k');
9 zdatam(handlem('allline'), 1000);
```

Rezultat naloge 3: Dobljen izris globalnega geopotencialnega modela EGM96 v Robinsonovi projekciji. Opredelite območja, kjer so geoidne višine najmanjše (najbolj negativne) in kje največje (najbolj pozitivne). Kdaj je geoidna višina pozitivna in kdaj negativna (skica lege geoida glede na referenčni elipsoid)?

5.4 Naloga 4: Vizualizacije in animacije

Z uporabo MATLAB-ove aplikacije [rotationg_3d_globe](#)³ naredite:

- vizualizacijo topografije Zemlje,
- vizualizacijo geoida Zemlje,
- animacijo, iz katere je razvidna fizikalna oblika Zemlje, tj. globalni model geoida (format GIF, trajanje ene rotacije 30 s, 1 FPS, največja velikost končne datoteke 10 MB),
- datoteko za 3D tisk (format STL).

Navodila za uporabo programa najdete v datoteki `manual.html`. Vizualizacijo datoteke STL lahko pogledate v spletnem pregledovalniku: <https://www.viewstl.com/>.

Rezultat naloge 4: Zgoraj naštete vizualizacije. Vizualizacijo topografije vključite v poročilo, animacijo in datoteko za 3D tisk pa oddajte kot prilogo poročilu.

6 REZULTATI

V spletno učilnico oddajte poročilo z rezultati nalog 1–4. Poročilo v formatu PDF, animacijo in datoteko STL oddajte v obliki ZIP datoteke, ki naj bo poimenovana `FG-V02-Priimek_Ime.zip`.

Rok za oddajo: 1. 4. 2025

²<https://mathworks.com/products/mapping.html>

³https://www.asu.cas.cz/~bezdek/vyzkum/rotating_3d_globe/index.php