

# VAJA 6: APROKSIMACIJA LOKALNE VIŠINSKE REFERENČNE PLOSKVE Z RAVNINO

2023/2024

## 1 UVOD

V primeru, da je na nekem območju državna višinska referenčna ploskev preslabe kakovosti za našo nalogo, moramo vzpostaviti lokalno višinsko referenčno ploskev ustrezne kakovosti. V ta namen točkam, ki so enakomerno razporejene po obravnavanem območju, z geometričnim nivelmanom ali trigonometričnim višinomerstvom določimo nadmorsko višino  $H$ , z GNSS-izmero pa elipsoidno višino  $h$ . Iz dobljenih (kvazi)geoidnih višin točk  $N = h - H$  lahko lokalno višinsko referenčno ploskev aproksimiramo z ravnino:

$$N = A e' + B n' + C \quad (1)$$

kjer so:

- $N$  ... (kvazi)geoidna višina [m],
- $e'$  ...  $e$  koordinata točke, reducirana na težišče mreže [m],
- $n'$  ...  $n$  koordinata točke, reducirana na težišče mreže [m],
- $A$  ... naklonski koeficient ravnine v smeri koordinatne osi  $e$ , tj. v smeri vzhod-zahod,
- $B$  ... naklonski koeficient ravnine v smeri koordinatne osi  $n$ , tj. v smeri sever-jug,
- $C$  ... geoidna višina težišča mreže [m].

## 2 PODATKI

Podane imate podatke za dve delovišči, Krvavec in Kras. Za obe delovišči imate podane ravninske koordinate točk v državnem koordinatnem sistemu D96/TM, elipsoidne višine nad elipsoidom GRS 80 in nadmorske (normalne ortometrične) višine v starem državnem višinskem sistemu SVS2000.

Podatki za delovišče Krvavec so v datoteki `Krvavec-D96TM-SVS2000.txt`, za delovišče Kras pa v datoteki `Kras-D96TM-SVS2000.txt`.

## 3 NALOGA

Pri vaji bomo obravnavali potek geoida pod Kamniško-Savinjskimi Alpami, od Cerkelj na Gorenjskem do Krvavca in na območju Krasa v okolici Sežane. Vaša naloga je, da naredite aproksimacijo ploskve geoida z ravnino za obe obravnavani območji. Potrebne podatke najdete v datoteki `FG-V06-podatki.7z`.

## 4 REZULTATI

Rezultati vaje naj vsebujejo (za vsako obravnavano območje):

- skico danih točk na kartografski podlagi;
- z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov ocenjene parametre lokalne ploskve geoida, ki jo aproksimirate z ravnino, tj. koeficiente  $A$ ,  $B$  in  $C$ , ter njihove natančnosti;
- nove geoidne višine danih točk, izračunane na podlagi ocenjene lokalne višinske referenčne ploskve;
- oceno natančnost dobljene lokalne višinske referenčne ploskve na osnovi povprečne natančnosti novih geoidnih višin danih točk;
- opis geometričnega pomena koeficientov  $A$ ,  $B$  in  $C$ ;
- vrednost (v kotnih sekundah in v mm/km) in smer maksimalnega naklona ocenjene ravnine;
- primerjavo med geoidnimi višinami, dobljenimi s terensko izmero, geoidnimi višinami, dobljenimi iz lokalne višinske referenčne ploskve in geoidnimi višinami, dobljenimi iz državne višinske referenčne ploskve SLO\_AMG2000/Trst.

V spletno učilnico oddajte kratko poročilo z rezultati vaje v obliki datoteke PDF, ki naj bo poimenovana FG-V06-Priimek\_Ime.pdf.

Rok za oddajo: 30. 5. 2024

## 5 POMOČ

### 5.1 Redukcija koordinat na težišče mreže

Koordinate točk reduciramo na težišče mreže zaradi numerične stabilnosti matematičnega modela izravnavo po MNK. Z redukcijo koordinat na težišče mreže pridobi tudi koeficient  $C$  ravnine lokalne višinske referenčne ploskve smiseln pomen – predstavlja (kvazi)geoidno višino težišča mreže. Koordinate težišča mreže  $T^*(e^*, n^*)$  izračunamo po enačbah:

$$e^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e_i \qquad n^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i \qquad (2a, 2b)$$

kjer je  $k$  število točk v mreži.

Koordinate posamezne točke reduciramo na težišče mreže po enačbah:

$$e'_i = e_i - e^* \qquad n'_i = n_i - n^* \qquad (3a, 3b)$$

## 5.2 Izravnava ravnine po MNK – posredni model izravnave

Izhajamo iz enačbe ravnine:

$$N - A e' - B n' - C = 0 \quad (4)$$

Za  $u = n_0 = 3$  neznanke imamo  $n = k$  enačb popravkov opazovanj ( $k$  – število točk v mreži), oblike:

$$F_i \equiv \hat{N}_i - \hat{A} e'_i - \hat{B} n'_i - \hat{C} = 0 \quad (5)$$

Matrika  $\mathbf{B}$  vsebuje odvode enačb popravkov opazovanj po neznankah:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -e'_1 & -n'_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -e'_k & -n'_k & -1 \end{bmatrix}_{k \times 3} \quad (6)$$

Ker imamo za obravnavani primer linearen matematični model, so elementi vektorja neznank  $\Delta$  kar neznani parametri ravnine, elementi vektorja  $\mathbf{f}$  pa negativne vrednosti geoidnih višin v posameznih točkah:

$$\Delta = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ \vdots \\ -N_k \end{bmatrix}_{k \times 1} \quad (7, 8)$$

Matrika uteži naj bo kar enotska matrika,  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_k$ .

Rešitev **funktionalnega modela** (levo) in **stohastičnega modela** (desno) posredne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \quad (9a) \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - n_0} \quad (10a)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (9b) \quad \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \mathbf{N}^{-1} \quad (10b)$$

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \quad (9c) \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T \quad (10c)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \Delta \quad (9d) \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad (10d)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \quad (9e) \quad \Sigma_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} \quad (10e)$$

$$\Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad (10f)$$

$$\Sigma_{\mathbf{I}\mathbf{I}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} \quad (10g)$$

Ker ne poznamo referenčne variance a-priori  $\sigma_0^2$ , za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ .

### 5.3 Izračun maksimalnega naklona ravnine

Maksimalni naklon ravnine  $\beta_{max}$  izračunamo kot:

$$\beta_{max}\left[\frac{\text{m}}{\text{m}}\right] = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (11a)$$

$$\beta_{max}\left[\frac{\text{mm}}{\text{km}}\right] = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 10^6 \quad (11b)$$

oziroma v kotnih enotah:

$$\beta_{max}[^{\circ}] = \arctan \sqrt{A^2 + B^2} \approx \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \rho^{\circ} \quad (12a)$$

$$\beta_{max}["] = \arctan \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 3600 \approx \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \rho'' \quad (12b)$$

kjer je  $\rho^{\circ}$  pretvornik iz radianov v kotne stopinje,  $\rho''$  pa pretvornik iz radianov v kotne sekunde. V zgornjih enačbah velja desna aproksimacija za primere majhnih kotov (kar naklonski koti ploskve geoida običajno so).

Smer maksimalnega naklona  $\alpha$  izračunamo po enačbi:

$$\alpha = \arctan \frac{A}{B} \quad (13)$$

pri čemer upoštevamo *pravilo smernega kota*  $\rightarrow \alpha \in [0^{\circ}, 360^{\circ})$ .