# VAJA 6: APROKSIMACIJA LOKALNE VIŠINSKE REFERENČNE PLOSKVE Z RAVNINO – POMOČ

2021/2022

## 1 REDUKCIJA KOORDINAT NA TEŽIŠČE MREŽE

Koordinate točk reduciramo na težišče mreže zaradi numerične stabilnosti matematičnega modela izravnave po MNK. Z redukcijo koordinat na težišče mreže pridobi tudi koeficient $C$ ravnine lokalne višinske referenčne ploskve smiseln pomen – predstavlja (kvazi)geoidno višino težišča mreže. Koordinate težišče mreže $T^*(e^*, n^*)$ izračunamo po enačbah:

$$e^* = \frac{1}{k}\sum_{i=i}^{k} e_i \qquad\qquad n^* = \frac{1}{k}\sum_{i=i}^{k} n_i \tag{1a, 1b}$$

kjer je $k$ število točk v mreži.

Koordinate posamezne točke reduciramo na težišče mreže po enačbah:

$$e_i' = e_i - e^* \qquad\qquad n_i' = n_i - n^* \tag{2a, 2b}$$

## 2 IZRAVNAVA RAVNINE PO MNK – POSREDNI MODEL IZRAVNAVE

Izhajamo iz enačbe ravnine:

$$N - A\,e' - B\,n' - C = 0 \tag{3}$$

Za $u = n_0 = 3$ neznanke imamo $n = k$ enačb popravkov opazovanj, ki so oblike:

$$F_i \equiv \hat{N}_i - \hat{A}\,e_i' - \hat{B}\,n_i' - \hat{C} = 0 \tag{4}$$

Matrika $\mathbf{B}$ vsebuje odvode enačb popravkov opazovanj po neznankah:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -e_1' & -n_1' & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -e_k' & -n_k' & -1 \end{bmatrix}_{k\times 3} \tag{5}$$

Ker imamo za obravnavani primer linearen matematični model, so elementi vektorja neznank $\Delta$ kar neznani parametri ravnine, elementi vektorja $\mathbf{f}$ pa negativne vrednosti geoidnih višin v posameznih točkah:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad\qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ \vdots \\ -N_k \end{bmatrix}_{k\times 1} \tag{6, 7}$$

Za matriko uteži $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ privzamemo enotsko matriko $\mathbf{I}_k$. Vrednosti referenčne variance a-priori $\sigma_0^2$ ne poznamo, zato naj bo $\sigma_0^2 = 1$.

Rešitev **funkcionalnega modela** (levo) in **stohastičnega modela** (desno) posredne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \tag{8a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \tag{8c}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \boldsymbol{\Delta} \tag{8d}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \tag{8e}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - n_0} \tag{9a}$$

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}} = \mathbf{N}^{-1} \tag{9b}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T \tag{9c}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} \tag{9d}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}} \tag{9e}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{vv}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} \tag{9f}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} \tag{9g}$$

Ker ne poznamo referenčne variance a-priori $\sigma_0^2$, za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

## 3 IZRAČUN MAKSIMALNEGA NAKLONA RAVNINE

Maksimalni naklon ravnine $\beta_{max}$ izračunamo kot:

$$\beta_{max}[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}] = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{10a}$$

$$\beta_{max}[\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{km}}] = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 10^6 \tag{10b}$$

oziroma v kotnih enotah:

$$\beta_{max}[^\circ] = \arctan \sqrt{A^2 + B^2} \approx \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \rho^\circ \tag{11a}$$

$$\beta_{max}[''] = \arctan \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 3600 \approx \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \rho'' \tag{11b}$$

V zgornjih enačbah velja desna aproksimacija za primere majhnih kotov (kar naklonski koti ploskve geoida običajno so).

Smer maksimalnega naklona $\alpha$ izračunamo po enačbi:

$$\alpha = \arctan \frac{A}{B} \tag{12}$$

pri čemer upoštevamo *pravilo smernega kota* $\rightarrow \alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$.