Univerza
v Ljubljani
Fakulteta za gradbeništvo
in geodezijo

RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKA – VAJE

Rešene naloge iz knjižnice numpy

Jaka Dujc

Ljubljana, September 2023

Računalništvo in informatika - vaje

Rešene naloge iz knjižnice numpy

Jaka Dujc

September 2023

Kazalo

Poglavje 1. Uvod

NumPy https://numpy.org/ je odprtokodna (brezplačna) knjižnica programskega jezika Python, ki se uporablja za numerično računanje. Glavni atribut knjižnice *numpy* je hitrost procesiranja. In sicer je bistvo knjižnice v temu, da ne obdelujemo posameznih numeričnih vrednosti, ampak se podatke združuje v nize (eno ali več dimenzionalne sezname), ki se nato obdelujejo z integriranimi orodji.

Hitrost obdelave podatkov je, predvsem ko imamo opravka z velikim številom podatkov, za nekaj razredov velikosti večja, kot če bi uporabili čisto Python kodo. Ključ do te hitrosti se skriva v temeljih knjižnice *numpy*, ki poleg programskega jezika Python uporabljajo zelo hitre rutine napisane v programskem jeziku C.

V tem smislu se lahko Python v kombinaciji s knjižnico *numpy* uporablja kot alternativa plačljivemu programskemu jeziku Matlab https://www.mathworks.com.

Ta dokument je na razpolago v več različicah, in sicer kot:

- PDF dokument, [https://fgg-web.fgg.uni-lj.si/~/jdujc/gradiva/numpy/numpy_skripta.pdf]
- ali spletna stran. [https://fgg-web.fgg.uni-lj.si/~/jdujc/gradiva/numpy/index.html]

1.1. Namestitev knjižnice numpy

Knjižnico *numpy* lahko namestimo na več načinov; glej npr. https://numpy.org/install/.

Za začetnike oziroma za tiste, ki želijo namestiti vsa orodja za numerično obdelavo podatkov, je priporočljivo, da naložijo aplikacijo *Anaconda* https://www.anaconda.com/download, saj z njo dobijo čisto vsa potrebna orodja (npr. Jupyter-Notebook) in knjižnice za numerično računanje (*python*, *numpy*, *scipy*, *matplotlib*, itd.).

1.2. Uvoz knjižnice numpy

Tako kot vse ostale knjižnice tudi *numpy* vključimo v svojo kodo z ukazom `import`, kot je prikazano v spodnji programski kodi.

Programska koda za uvoz knjižnice numpy

```
1 import numpy as np
2 seznam = np.array([1, 2, 3])
```

V nekaterih razdelkih smo pri opisu delovanja posameznih funkciji zaradi jedrnatosti izpustili vrstico `import numpy as np`. Ne glede na to je mišljeno, da je `numpy` oz. `np` uvožen in je na razpolago za uporabo v programski kodi.

Razlaga programske kode

vrstica	komentar
1	Dobra praksa je, da na začetku vsakega dokumenta vključimo potrebne knjižnice. Tu smo vključili knjižnico `numpy` v spremenljivko (objekt) z imenom `np`, kar je standardna praksa, saj si s tem skrajšamo programsko kodo.
2	Kot primer uporabe je prikazana funkcija `np.array()`, ki v spremenljivko `seznam` zapiše niz številk.

1.3. Hiter začetek

Za tiste, ki že imajo nekaj znanja iz programiranja v jeziku Python oz. izkušnje s kakšnim drugim računskim orodjem (npr. Matlab), priporočamo ogled naslednjega videa, ki v zelo zgoščeni obliki predstavi uporabo

knjižnice *numpy*:

- NumPy Tutorial (2022): For Physicists, Engineers, and Mathematicians [https://www.youtube.com/watch?v=DcfYgePyedM]

Poglavje 2. Numpy seznami

2.1. Ustvarjanje seznamov

Glavna prednost knjižnice *numpy* je v temu, da se podatke združuje v nize oziroma sezname in tako ne obdelujemo posameznih numeričnih vrednosti. Pri tem se namesto standardne podatkovne strukture `list` uporablja poseben seznam, ki ga uvaja knjižnica *numpy*. V nadaljevanju bomo temu seznamu rekli seznam *numpy* ali pa bolj formalno `numpy.ndarray`.

Seznam *numpy* ima podobno strukturo seznamu `list` iz programskega jezika Python. Glavna razlika je v tem, da je `numpy.ndarray` precej hitrejši in bolj učinkovit v smislu uporabljenega spomina.

2.1.1. np.array()

Seznam *numpy* lahko ustvarimo na več načinov. Najbolj osnoven način je, da podatkovni tip `list` kot argument uporabimo v funkciji `np.array`. Na primer:

```
import numpy as np

seznam_list = [1, 2, 3]

seznam_numpy = np.array(seznam_list)
```

ali pa neposredno:

```
import numpy as np

seznam_numpy = np.array([1, 2, 3])
```

kar v obeh primerih ustvari seznam oblike `[1 2 3]`.

Podobno lahko iz podatkovnih tipov `list` ustvarimo tudi dvo in več dimenzionalne sezname. Na primer:

```
import numpy as np

seznam_2D_list = [[1, 2, 3],[4, 5, 6]]
seznam_numpy_2D = np.array(seznam_2D_list)

seznam_3D_list = [[[1, 2, 3],[4, 5, 6]],
                  [[7, 8, 9],[10, 11, 12]]]
seznam_numpy_3D = np.array(seznam_3D_list)
```

kjer najprej ustvarimo 2D seznam, ki je oblike:

```
[[1 2 3]
 [4 5 6]]
```

nato še 3D seznam oblike:

```
[[[ 1  2  3]
  [ 4  5  6]]
 [[ 7  8  9]
  [10 11 12]]]
```

2.1.2. np.zeros(), np.ones(), np.full()

Poleg funkcije `np.array()` lahko ustvarimo sezname še na druge načine. Na primer:

- funkcija `np.zeros()` ustvari seznam, kjer so vsi elementi enaki 0,
- funkcija `np.ones()` ustvari seznam, kjer so vsi elementi enaki 1,
- funkcija `np.full()` ustvari seznam, kjer imajo vsi elementi poljubno vrednost.

Pri vseh zgornjih funkcijah kot parameter nastopa tudi dimenzija seznama. Na primer:

```
import numpy as np
seznam_0 = np.zeros(3)
seznam_1 = np.ones(4)
seznam_2 = np.full(5, 2.)
seznam_zeros_2D = np.zeros((2,3))
seznam_ones_3D = np.zeros((2,3,4))
seznam_full_2D = np.full((2,3),3)
```

kjer smo najprej ustvarili seznam s tremi ničlami `[0 0 0]`, nato seznam s štirimi enkami `[1. 1. 1. 1.]`, sledi seznam s petimi dvojkami `[2. 2. 2. 2. 2.]`, nato smo ustvarili 2D seznam z ničlami:

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

nato 3D seznam z enkami:

```
[[[1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]]
 [[1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]]]
```

in na koncu še 2D seznam s trojkami:

```
[[3 3 3]
 [3 3 3]]
```

2.1.3. np.random.random(), np.random.randn()

V kolikor bi radi ustvarili seznam naključnih števil, lahko uporabimo:

- funkcijo `np.random.random()`, ki generira naključna števila med 0 in 1, ali pa
- funkcijo `np.random.randn()`, ki ustvarja naključne vrednosti, ki ustrezajo normalni porazdelitvi z aritmetično sredino 0 in standardnim odklonom 1.

```
import numpy as np
seznam_0 = np.random.random(4)
seznam_1 = np.random.randn(5)
seznam_random_3D = np.random.random((2,3,4))
seznam_randn_2D = np.random.randn(2,3,4)
```

V zgornji programski kodi smo najprej ustvarili seznam s štirimi naključnimi števili med 0 in 1 `[0.48919153 0.37661206 0.82123356 0.12992426]`, nato seznam s petimi elementi `[-0.79611779 0.69580781 -0.17002363 1.0144476 1.11151188]`, sledi mu naključni 3D seznam:

```
[[[0.34266366 0.85709128 0.53028222 0.39594552]
  [0.46052613 0.12232418 0.51135007 0.39929888]
  [0.24536472 0.15279226 0.17880979 0.35304374]]

 [[0.9157075  0.73993641 0.00146697 0.252301  ]
  [0.07161547 0.59074746 0.91014181 0.26519995]
  [0.64553695 0.53732667 0.98011274 0.67180845]]]
```

in na koncu še 2D naključni seznam z normalno porazdelitvijo:

```
[[-0.27083714 -0.40626521  0.59413101]
 [-0.51287891  0.30977327  1.11657568]]
```

Vrednosti v zgornjih seznamih so naključne in se spremijo vsakič, ko izvrednotimo programsko kodo.

2.1.4. np.linspace()

V kolikor bi radi interval razdelili na določeno število vmesnih točk, uporabimo funkcijo `np.linspace()`, kot na primer:

```
import numpy as np
seznam = np.linspace(1,7,5)
```

kjer ustvarimo seznam s petimi točkami na intervalu med 1 in 7, ki je oblike `[1. 2.5 4. 5.5 7.]`.

2.1.5. np.arange()

Funkcija `np.arange()` deluje podobno kot Python-ova funkcija `range()`, le da ni omejena na cela števila.

```
import numpy as np
seznam = np.arange(1,7,1.2)
```

V zgornji kodi smo interval med 1 in 7 razdelili na podintervale dolžine 1.2, kar ustvari seznam `[1. 2.2 3.4 4.6 5.8]`.

Funkcija `np.arange()` ne vrne zadnje točke na intervalu (v zgornjem primeru je to `7`). Če bi radi vključili tudi zadnjo točko pri uporabi funkcije `np.arange()`, je najlažje, da malenkost povečamo zgornjo mejo (na npr. `7.1`).

2.1.6. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Ustvarjanje seznamov. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Pripravi in izpiši seznam `seznam_0`, ki vsebuje števila od 1 do 5.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_1`, ki vsebuje števila od 6 do 9. Uporabi funkcijo `range()`.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_2`, ki vsebuje 5 elementov z vrednostjo 0.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_3`, ki vsebuje 5 elementov z vrednostjo 1.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_4`, ki vsebuje 5 elementov z naključno vrednostjo med 0 in 1.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_5`, ki vsebuje 5 elementov z normalno naključno porazdelitvijo.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_6`, ki vsebuje 3 vrednosti med 0 in 10 ter z enakomernim razmikom med njimi.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_7`, ki vsebuje števila med 0 in 10 z razmakom 2. Uporabi funkcijo `np.arange()`.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_8`, ki vsebuje 5 elementov z vrednostjo 1. Uporabi funkcijo `np.full()`.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_2D_list`, ki v prvi vrstici vsebuje števila od 1 do 3 ter v drugi vrstici števila 4 do 6.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_3D_list`, kjer je prvi sloj enak seznamu `seznam_2D_list`, drugi sloj pa vsebuje v prvi vrstici števila od 7 do 9 ter v drugi vrstici števila 10 do 12.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_zeros_2D`, ki vsebuje 2 vrstici in 3 stolpce samih ničel. Uporabi funkcijo `np.zeros()`.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_ones_3D`, ki vsebuje 2 sloja, 3 vrstice in 4 stolpce samih enic. Uporabi funkcijo `np.ones()`.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_full_2D`, ki vsebuje 2 vrstici in 3 stolpce samih trojk. Uporabi funkcijo `np.full()`.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_random_3D`, ki vsebuje 2 sloja, 3 vrstice in 4 stolpce naključnih vrednosti.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_randn_2D`, ki vsebuje 2 vrstici in 3 stolpce naključnih vrednosti z normalno porazdelitvijo.
- Pripravi in izpiši seznam `seznam_empty_3D`, ki vsebuje 2 sloja, 3 vrstice in 4 stolpce in nima predpisanih vrednosti. Uporabi funkcijo `np.empty()`.

2.1.7. Rešitve

Programska koda

```
import numpy as np

#############
# 1D seznami
#############

# seznam iz lista
seznam_0 = np.array([1,2,3,4,5])
print("iz lista", seznam_0)

# seznam iz range-a
seznam_1 = np.array(range(6,10))
print("iz range-a", seznam_1)

# seznam ničel
seznam_2 = np.zeros(5)
print("seznam ničel", seznam_2)

# seznam enic
seznam_3 = np.ones(5)
print("seznam enic", seznam_3)

# naključna števila
seznam_4 = np.random.random(5)
print("random", seznam_4)

# naključen seznam z normalno porazdelitvijo
seznam_5 = np.random.randn(5)
print("normalna porazdelitev", seznam_5)

# seznam z enakomernim razmakom med številkami
seznam_6 = np.linspace(0, 10, 3)
print("enakomeren razmak", seznam_6)

# seznam z arange
seznam_7 = np.arange(0, 11, 2)
print("arange", seznam_7)

# predpisana vrednost
seznam_8 = np.full(5,1.)
print("predpisana vrednost", seznam_8)

################
# 2D/3D seznami
################

```

```
# 2D iz list-a
seznam_2D_list = [[1, 2, 3],[4, 5, 6]]
seznam_numpy_2D = np.array(seznam_2D_list)
print("seznam_2D_list\n", seznam_numpy_2D)

# 3D iz list-a
seznam_3D_list = [[[1, 2, 3],[4, 5, 6]],
                  [[7, 8, 9],[10, 11, 12]]]
seznam_numpy_3D = np.array(seznam_3D_list)
print("seznam_2D_list\n", seznam_numpy_3D)

# 2D seznam ničel
seznam_zeros_2D = np.zeros((2,3))
print("seznam_zeros_2D\n", seznam_zeros_2D)

# 3D seznam enic
seznam_ones_3D = np.ones((2,3,4))
print("seznam_ones_3D\n", seznam_ones_3D)

# 2D seznam z vrednostmi 3
seznam_full_2D = np.full((2,3),3)
print("seznam_full_2D\n", seznam_full_2D)

# 3D naključen seznam
seznam_random_3D = np.random.random((2,3,4))
print("seznam_random_3D\n", seznam_random_3D)

# 2D seznam z normalno porazdelitvijo
seznam_randn_2D = np.random.randn(2,3)
print("seznam_randn_2D\n", seznam_randn_2D)

# 3D prazen seznam
seznam_empty_3D = np.empty((2,3,4))
print("seznam_empty_3D\n", seznam_empty_3D)
```

Izpis rešitev

```
iz lista [1 2 3 4 5]
iz range-a [6 7 8 9]
seznam ničel [0. 0. 0. 0. 0.]
seznam enic [1. 1. 1. 1. 1.]
random [0.22698497 0.58858667 0.75416968 0.01295893 0.12006102]
normalna porazdelitev [ 0.72476733  0.47211282 -1.52345608  0.78531476 -1.75543055]
enakomeren razmak [ 0.  5. 10.]
arange [ 0  2  4  6  8 10]
predpisana vrednost [1. 1. 1. 1. 1.]
seznam_2D_list
 [[1 2 3]
 [4 5 6]]
```

```
seznam_2D_list
 [[[ 1  2  3]
  [ 4  5  6]]

 [[ 7  8  9]
  [10 11 12]]]
seznam_zeros_2D
 [[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
seznam_ones_3D
 [[[1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]]

 [[1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]]]
seznam_full_2D
 [[3 3 3]
 [3 3 3]]
seznam_random_3D
 [[[0.81687724 0.1316954  0.43249378 0.68183805]
  [0.24865459 0.46379858 0.45217242 0.68531292]
  [0.71744644 0.96624331 0.59466896 0.7927558 ]]

 [[0.58785492 0.62404746 0.37233981 0.44714767]
  [0.62235022 0.9475961  0.19247777 0.63526505]
  [0.28919388 0.96775128 0.58987585 0.15418241]]]
seznam_randn_2D
 [[ 0.57894841 -1.57132949  1.47556929]
 [-0.43090203  0.57412793 -0.90833248]]
seznam_empty_3D
 [[[0.81687724 0.1316954  0.43249378 0.68183805]
  [0.24865459 0.46379858 0.45217242 0.68531292]
  [0.71744644 0.96624331 0.59466896 0.7927558 ]]

 [[0.58785492 0.62404746 0.37233981 0.44714767]
  [0.62235022 0.9475961  0.19247777 0.63526505]
  [0.28919388 0.96775128 0.58987585 0.15418241]]]
```

2.2. Indeksiranje numpy seznamov

Podobno kot pri podatkovni strukturi `list` dostopamo do posameznih elementov seznama *numpy* z zaporedno številko elementa (angl. **array index**). Kot pri vseh ostalih indeksiranih podatkovnih strukturah Python, se tudi pri seznamu *numpy* številčenje oziroma indeksiranje elementov začne s številko 0.

2.2.1. Vrednosti elementov

Pri 1D seznamih *numpy* je indeksiranje povsem identično kot pri podatkovnem tipu `list`:

```
seznam[indeks]
```

kjer `indeks` določa indeks oziroma zaporedno številko elementa v seznamu, ki bi ga radi dobili.

Na primer do posameznih elementov seznama `seznam = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])` dostopamo na naslednje načine:

- `seznam[0]` - nam vrne prvi element (vrednost 1),
- `seznam[3]` - nam vrne četrti element (vrednost 4),
- `seznam[6]` - nam vrne sedmi element (vrednost 7),
- `seznam[-1]` - nam vrne zadnji element (vrednost 7),
- `seznam[-3]` - nam vrne tretji element iz zadnje strani (vrednost 5),
- itd.

Indeksiranje večdimenzionalnih seznamov je podobno kot pri 1D seznamih, le da je potrebno za vsako dodatno dimenzijo navesti dodaten indeks. Pri 2D seznamih je posamezen element določen z indeksom vrstice in indeksom stolpca:

```
seznam_2D[indeks_vrstice, indeks_stolpca]
```

pri 3D seznamih pa je potrebno dodati še indeks sloja:

```
seznam_3D[indeks_sloja, indeks_vrstice, indeks_stolpca]
```

2.2.2. Urejanje elementov

Tudi urejanje posameznih elementov 1D seznama *numpy* poteka identično kot pri tipu `list`, in sicer:

```
seznam[indeks] = nova_vrednost
```

kjer `indeks` določa zaporedno številko elementa v seznamu, ki ga popravljamo, `nova_vrednost` pa je nova vrednost, s katero bomo povozili trenutno vrednost elementa `seznam[indeks]`.

Na primer, če bi radi popravili nekaj elementov iz seznama `seznam = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])`, lahko to storimo z naslednjo programsko kodo:

```
# popravimo 1. element
seznam[0] = 2

# popravimo 4. element
seznam[3] = 3

# popravimo 7. element
seznam[6] = 4

# popravimo zadnji element
```

```
seznam[-1] = 5

# tretji element iz zadnje strani
seznam[-3] = 6
```

Končna vrednost seznama po izvrednotenju zgornje programske kode je `[2 2 3 3 6 6 5]`.

Pri urejanju posameznih elementov 2D seznamov moramo navesti indeks vrstice in indeks stolpca:

```
seznam_2D[indeks_vrstice, indeks_stolpca] = nova_vrednost
```

oziroma pri 3D seznamih je potrebno navesti še indeks sloja:

```
seznam_3D[index_sloja, indeks_vrstice, indeks_stolpca] = nova_vrednost
```

2.2.3. Napredno indeksiranje

Indeksiranje seznamov *numpy* ni omejeno le na posamezen element, ampak lahko dostopamo oz. spreminjamo tudi več elementov naenkrat.

Vrednosti elementov

Sintaksa je v primeru naprednega indeksiranja naslednja:

```
seznam[seznam_indeksov]
```

kjer `seznam_indeksov` določa seznam, v katerem so zapisani indeksi elementov, ki bi jih radi dobili.

Na primer, če bi radi iz seznama `seznam = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])` dobili elemente na indeksih 5, 2, in -1, lahko to storimo z naslednjo programsko kodo:

```
izbrani_elementi = seznam[[5, 2, -1]]
print(izbrani_elementi) # izpis: [6 3 8]
```

kjer smo v spremenljivko `izbrani_elementi` shranili seznam z željenimi vrednostmi.

Indeksiranje seznamov *numpy* nam omogoča tudi, da iz obstoječega seznama določimo nov seznam, ki je lahko poljubnih dimnezij. In sicer je dimenzija novega seznama določena s seznamom indeksov. Na primer programska koda:

```
izbrani_elementi = seznam[[[1, 2, 3],[4, 5, 6]]]
print(izbrani_elementi) # izpis: [[2 3 4] [5 6 7]]
```

ustvari dvodimenzionalni seznam `izbrani_elementi`, ki vsebuje izbrane vrednosti iz 1D seznama `seznam`.

Napredno indeksiranje seveda ni omejeno le na 1D sezname. Na primer:

```
seznam_2d = np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
izbrani_stolpci = seznam_2d[:,[1,2]]
print(izbrani_stolpci) # izpis: [[2 3] [6 7] [10 11]]
```

iz seznama `seznam_2d` pridobi elemente, ki so v stolpcih z ideksom 1 in 2.

Urejanje elementov

Z naprednim indeksiranjem lahko tudi popravimo vrednosti večih elementov hkrati. Sintaksa je v temu primeru naslednja:

```
seznam[seznam_indeksov] = nove_vrednosti
```

oziroma v konkternem primer nam programska koda:

```
seznam[[4, 5, 6]] = [9 , 10 , 11]
print(seznam) # izpis: [1 2 3 4 9 10 11 8]
```

popravi vrednosti na indeksih 4, 5 in 6.

2.2.4. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Indeksiranje numpy seznamov. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Pripravi seznam `seznam_1D`, ki vsebuje števila od 1 do 7.
- Izpiši 1. element seznama.
- Izpiši 4. element seznama.
- Izpiši 7. element seznama.
- Izpiši zadnji element seznama.
- Izpiši 3. element z zadnje strani seznama.
- Popravi 1. element seznama in mu priredi vrednost 2.
- Popravi 4. element seznama in mu priredi vrednost 3.
- Popravi 7. element seznama in mu priredi vrednost 4.
- Popravi zadnji element seznama in mu priredi vrednost 5.
- Popravi 3. element z zadnje strani seznama in mu priredi vrednost 6.
- Pripravi seznam `seznam_2D`, ki je oblike [[1, 2, 3],[4, 5, 6],[7, 8, 9]].
- Izpiši element na poziciji 0, 0.
- Izpiši element na poziciji -3, -3.
- Izpiši element na poziciji 2, 2.
- Izpiši element na poziciji -1, -1.
- Izpiši element na poziciji 1, 1.
- Izpiši element na poziciji -2, -2.

- Popravi element na poziciji -3, -3 in mu priredi vrednost 12.
- Popravi element na poziciji 2, 2 in mu priredi vrednost 13.
- Popravi element na poziciji -1, -1 in mu priredi vrednost 14.
- Popravi element na poziciji 1, 1 in mu priredi vrednost 15.
- Popravi element na poziciji -2, -2 in mu priredi vrednost 16.
- Pripravi seznam `seznam_3D`, ki je oblike [[[1, 2, 3],[4, 5, 6],[7, 8, 9]],[[11, 12, 13],[14, 15, 16],[17, 18, 19]]].
- Izpiši element na poziciji 0, 0, 0.
- Izpiši element na poziciji -2, -3, -3.
- Izpiši element na poziciji 1, 2, 2.
- Izpiši element na poziciji -1, -1, -1.
- Izpiši element na poziciji 1, 1, 1.
- Izpiši element na poziciji -2, -2, -2.
- Popravi element na poziciji -3, -3, 1 in mu priredi vrednost 112.
- Popravi element na poziciji 1, 2, 2 in mu priredi vrednost 113.
- Popravi element na poziciji -1, -1, -1 in mu priredi vrednost 114.
- Popravi element na poziciji 1, 1, 1 in mu priredi vrednost 115.
- Popravi element na poziciji -2, 2, -2 in mu priredi vrednost 116.

2.2.5. Rešitve

Programska koda

```
1  import numpy as np
2
3  ##########################
4  ##########################
5  #        1D SEZNAMI     #
6  ##########################
7  ##########################
8  print("1D")
9
10 # pripravimo seznam
11 seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
12
13 ##########################
14 # dostopanje do elementa#
15 ##########################
16 # izpišemo prvi element
17 print("1. element", seznam_1D[0])
18
19 # izpišemo 4. element
20 print("4. element", seznam_1D[3])
21
22 # izpišemo 7. element
23 print("7. element", seznam_1D[6])
24
```

```
# izpišemo zadnji element
print("-1. element", seznam_1D[-1])

# izpišemo tretji element iz zadnje strani
print("-3. element", seznam_1D[-3])

##########################
#    urejanje elementa  #
##########################
# popravimo 1. element
seznam_1D[0] = 2

# popravimo 4. element
seznam_1D[3] = 3

# popravimo 7. element
seznam_1D[6] = 4

# popravimo zadnji element
seznam_1D[-1] = 5

# tretji element iz zadnje strani
seznam_1D[-3] = 6
print("popravljen seznam_1D\n", seznam_1D)

##########################
##########################
#        2D SEZNAMI     #
##########################
##########################
print("\n2D")

# pripravimo seznam
seznam_2D = np.array([[1, 2, 3],[4, 5, 6],[7, 8, 9]])

##########################
# dostopanje do elementa#
##########################
# izpišemo element 0, 0
print("element 0, 0:", seznam_2D[0, 0])

# izpišemo element -3, -3
print("element -3, -3:",seznam_2D[-3, -3])

# izpišemo element 2, 2
print("element 2, 2:",seznam_2D[2, 2])

# izpišemo element -1, -1
print("element -1, -1:",seznam_2D[-1, -1])
```

```
74
75 # izpišemo element 1, 1
76 print("element 1, 1:",seznam_2D[1, 1])
77
78 # izpišemo element -2, -2
79 print("element -2, -2:",seznam_2D[-2, -2])
80
81 ##########################
82 #    urejanje elementa  #
83 ##########################
84 # popravimo element -3, -3
85 seznam_2D[-3, -3] = 12
86
87 # popravimo element 2, 2
88 seznam_2D[2, 2] = 13
89
90 # popravimo element -1, -1
91 seznam_2D[-1, -1] = 14
92
93 # popravimo element 1, 1
94 seznam_2D[1, 1] = 15
95
96 # popravimo element -2, -2
97 seznam_2D[-2, -2] = 16
98 print("popravljen seznam_2D\n", seznam_2D)
99
100 ##########################
101 ##########################
102 #        3D SEZNAMI     #
103 ##########################
104 ##########################
105 print("\n3D")
106
107 # pripravimo seznam
108 seznam_3D = np.array([[[1, 2, 3],[4, 5, 6],[7, 8, 9]],[[11, 12, 13],[14, 15, 16
    ],[17, 18, 19]]])
109
110 ##########################
111 # dostopanje do elementa#
112 ##########################
113 # izpišemo element 0, 0, 0
114 print("element 0, 0, 0:", seznam_3D[0, 0, 0])
115
116 # izpišemo element -2, -3, -3
117 print("element -2, -3, -3:",seznam_3D[-2, -3, -3])
118
119 # izpišemo element 1, 2, 2
120 print("element 1, 2, 2:",seznam_3D[1, 2, 2])
121
```

```
122 # izpišemo element -1, -1, -1
123 print("element -1, -1, -1:",seznam_3D[-1, -1, -1])
124
125 # izpišemo element 1, 1, 1
126 print("element 1, 1, 1:",seznam_3D[1, 1, 1])
127
128 # izpišemo element -2, -2, -2
129 print("element -2, -2, -2:",seznam_3D[-2, -2, -2])
130
131 ##########################
132 #    urejanje elementa  #
133 ##########################
134 # popravimo element -3, -3, 1
135 seznam_3D[0, -3, 1] = 112
136
137 # popravimo element 1, 2, 2
138 seznam_3D[1, 2, 2] = 113
139
140 # popravimo element -1, -1, -1
141 seznam_3D[-1, -1, -1] = 114
142
143 # popravimo element 1, 1, 1
144 seznam_3D[1, 1, 1] = 115
145
146 # popravimo element -2, 2, -2
147 seznam_3D[-2, 2, -2] = 116
148 print("popravljen seznam_3D\n", seznam_3D)
```

Izpis rešitev

```
1D
1. element 1
4. element 4
7. element 7
-1. element 7
-3. element 5
popravljen seznam_1D
 [2 2 3 3 6 6 5]

2D
element 0, 0: 1
element -3, -3: 1
element 2, 2: 9
element -1, -1: 9
element 1, 1: 5
element -2, -2: 5
popravljen seznam_2D
 [[12  2  3]
 [ 4 16  6]
```

```
 [ 7  8 14]]

3D
element 0, 0, 0: 1
element -2, -3, -3: 1
element 1, 2, 2: 19
element -1, -1, -1: 19
element 1, 1, 1: 15
element -2, -2, -2: 5
popravljen seznam_3D
 [[[  1 112   3]
  [  4   5   6]
  [  7 116   9]]

 [[ 11  12  13]
  [ 14 115  16]
  [ 17  18 114]]]
```

2.3. Rezanje seznamov

Z rezanjem seznamov (angl. slicing) lahko na prepost način iz celotnega seznama izločimo podseznam, ali pa rezanje uporabimo za urejanje seznamov.

2.3.1. Podseznam

Sintaksa pri 1D seznamih je ekvivalentna klasični sintaksi Python:

```
seznam[zacetek:konec:korak]
```

kjer,

- `zacetek` predstavlja indeks elementa, ki bo prvi vključen v izbor,
- `konec` - predstavlja indeks zadnjega elementa v izboru, kateri pa ne bo vključen v izbor,
- `korak` - določa dolžino koraka med dvema elementoma v izboru.

Do podseznamov spodnjega seznama *numpy*:

```
seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
```

lahko lahko dostopamo na primer z:

- `seznam_1D[1:8:2]` razreže `seznam_1D` od indeksa **1** do indeksa **8** s korakom **2**, kar vrne seznam `[2 4 6 8]`,
- `seznam_1D[3:-1:3]` razreže `seznam_1D` od indeksa **3** do indeksa **-1** s korakom **3**, kar vrne seznam `[4 7]`,
- `seznam_1D[3:6]` razreže `seznam_1D` od indeksa **3** do indeksa **6** s prednastavljenim korakom, kar vrne seznam `[4 5 6]`,
- `seznam_1D[3::4]` razreže `seznam_1D` od indeksa **3** do konca seznama s korakom **4**, kar vrne seznam `[4 8]`,
- `seznam_1D[:8:3]` razreže `seznam_1D` od začetka do indeksa **8** s korakom **3**, kar vrne seznam `[1 4 7]`,

- `seznam_1D[::4]` razreže `seznam_1D` od začetka do konca s korakom **4**, kar vrne seznam `[1 5 9]`,
- `seznam_1D[:4:]` razreže `seznam_1D` od začetka do indeksa **4** s prednastavljenim korakom, kar vrne seznam `[1 2 3 4]`,
- `seznam_1D[4::]` razreže `seznam_1D` od indeksa **4** do konca s prednastavljenim korakom, kar vrne seznam `[5 6 7 8 9]`.
- `seznam_1D[-3:]` razreže `seznam_1D` od indeksa **-3** do konca s prednastavljenim korakom, kar vrne seznam `[7 8 9]`,
- `seznam_1D[-5:-2]` razreže `seznam_1D` od indeksa **-5** do indeksa **-2** s prednastavljenim korakom, kar vrne seznam `[5 6 7]`,
- `seznam_1D[-1::-2]` razreže `seznam_1D` od indeksa **-1** do začetka seznama s korakom **-2**, kar vrne seznam `[9 7 5 3 1]`,
- `seznam_1D[::-1]` razreže `seznam_1D` s korakom **-1**, kar dejansko vrne obrnjen seznam `[9 8 7 6 5 4 3 2 1]`.

Sintaksa pri večdimenzionalnih seznamih je podobna, le da je za vsako dodatno dimenzijo potrebno navesti vse tri parametre (začetni indeks, končni indeks in korak). V primeru 2D seznamov je sintaksa sledeča:

```
seznam_2D[zac_vrstica:kon_vrstica:korak_vrstica,
zac_stolpec:kon_stolpec:korak_stolpec]
```

2.3.2. Urejanje podseznamov

Rezanje lahko uporabimo tudi za urejanje seznamov. Sintaksa je povsem identična kot v prejšnjem razdelku, le da je za ureditev podseznama potrebno podati tudi novo vrednost:

```
seznam[zacetek:konec:korak] = nova_vrednost
```

oziroma v primeru 2D seznamov:

```
seznam_2D[zac_vrstica:kon_vrstica:korak_vrstica,
zac_stolpec:kon_stolpec:korak_stolpec] = nova_vrednost
```

kjer `nova_vrednost` predstavlja novo vrednost, ki se bo zapisala v izbrane elemente. Nova vrednost je lahko skalar, če vsem elementom priredimo enako vrednost.

Lahko pa za `novo_vrednost` podamo tudi eno ali več dimenzionalni seznam, če elementom prirejamo različne vrednosti.

Nekaj primerov urejanja 1D seznamov je navedenih spodaj, kjer smo za izvorni seznam vedno vzeli `seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])`:

- `seznam_1D[1:8:2] = 0`, kjer vsem elementom podseznama, določenega z začetnim indeksom **1**, končnim indeksom **8** in korakom **2** priredimo vrednost **0**. Po opreaciji je vsebina `seznam_1D` enaka `[1 0 3 0 5 0 7 0 9]`.
- `seznam_1D[3:-1:3] = [10, 20]`, kjer uredimo podseznam, določen z začetnim indeksom **3**, končnim indeksom **-1** in korakom **3** in mu priredimo novo vrednost **[10, 20]**. Po opreaciji je vsebina `seznam_1D` enaka `[1 2 3 10 5 6 20 8 9]`.
- `seznam_1D[-5:-2] = [1, 2, 3]`, kjer uredimo podseznam, določen z začetnim indeksom **-5** in končnim indeksom **-2** in mu priredimo novo vrednost **[1, 2, 3]**. Po opreaciji je vsebina `seznam_1D` enaka `[1 2 3 4 1 2`

`3 8 9]`.

- `seznam_1D[-1::-2] = 15`, kjer vsem elementom podseznama, določenega z začetnim indeksom **-1** in korakom **-2** priredimo vrednost **15**. Po opreaciji je vsebina `seznam_1D` enaka `[15 2 15 4 15 6 15 8 15]`.

2.3.3. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Rezanje seznamov. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Definiraj seznam `seznam_1D`, ki vsebuje števila od 1 do 9.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od 1 do 8 s korakom 2.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od 3 do -1 s korakom 3.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od 3 do 6.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od 3 do konca s korakom 4.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente od začetka seznama do indeksa 8 s korakom 3.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente od začetka do konca seznama s korakom 4.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente od začetka seznama do indeksa 4.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od 4 do konca seznama.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od -3 do konca seznama.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od -5 do -2.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje elemente na indeksih od -1 do začetka seznama s korakom -2.
- Z rezanjem izpiši seznam v obratnem vrstnem redu.
- Definiraj seznam `seznam_1D`, ki vsebuje števila od 1 do 9. Podseznamu, ki je na indeksih od 1 do 8 s korakom 2, priredi vrednosti 0 za vse elemente. Izpiši seznam `seznam_1D`.
- Definiraj seznam `seznam_1D`, ki vsebuje števila od 1 do 9. Podseznamu, ki je na indeksih od 3 do -1 s korakom 3, priredi vrednost[10, 20]. Izpiši seznam `seznam_1D`.
- Definiraj seznam `seznam_1D`, ki vsebuje števila od 1 do 9. Podseznamu, ki je na indeksih od -5 do -2, priredi vrednost [1, 2, 3]. Izpiši seznam `seznam_1D`.
- Definiraj seznam `seznam_1D`, ki vsebuje števila od 1 do 9. Podseznamu, ki je na indeksih od -1 do začetka, priredi vrednosti 15 za vse elemente. Izpiši seznam `seznam_1D`.
- Definiraj seznam `seznam_2D`, ki v treh vrsticah in štirih stolpcih vsebuje števila od 1 do 12.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje presek prvih dveh vrstic in prvih dveh stolpcev.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje presek zadnjih dveh vrstic in zadnjih dveh stolpcev.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje presek 1. in 3. vrstice ter 2. in 4. stolpca.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje prvo vrstico.
- Z rezanjem izpiši podseznam, ki vsebuje drugi stolpec.
- Definiraj seznam `seznam_2D`, ki v treh vrsticah in štirih stolpcih vsebuje števila od 1 do 12. Podseznamu, ki je presek prvih dveh vrstic in prvih dveh stolpcev, priredi vrednosti 0 za vse elemente. Izpiši seznam `seznam_2D`.
- Definiraj seznam `seznam_2D`, ki v treh vrsticah in štirih stolpcih vsebuje števila od 1 do 12. Podseznamu, ki je presek zadnjih dveh vrstic in zadnjih dveh stolpcev, priredi vrednost [[15, 16], [17, 18]]. Izpiši seznam `seznam_2D`.
- Definiraj seznam `seznam_2D`, ki v treh vrsticah in štirih stolpcih vsebuje števila od 1 do 12. Podseznamu, ki je presek presek 1. in 3. vrstice ter 2. in 4. stolpca, priredi vrednost [[2, 4], [10, 12]]. Izpiši seznam `seznam_2D`.

- Definiraj seznam `seznam_2D`, ki v treh vrsticah in štirih stolpcih vsebuje števila od 1 do 12. Podseznamu, ki vsebuje prvo vrstico, priredi vrednosti 15 za vse elemente. Izpiši seznam `seznam_2D`.
- Definiraj seznam `seznam_2D`, ki v treh vrsticah in štirih stolpcih vsebuje števila od 1 do 12. Podseznamu, ki vsebuje drugi stolpec, priredi vrednosti [15, 16, 17]. Izpiši seznam `seznam_2D`.

2.3.4. Rešitve

Programska koda

```
import numpy as np

##########################
##########################
#  REZANJE 1D SEZNAMOV  #
##########################
##########################
print("1D")

# pripravimo seznam
seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
print("seznam_1D", seznam_1D)

# rez od indeksa 1 do 8 s korakom 2
print("seznam_1D[1:8:2]", seznam_1D[1:8:2])

# rez od indeksa 3 do -1 s korakom 3
print("seznam_1D[3:-1:3]", seznam_1D[3:-1:3])

# rez od indeksa 3 do 6
print("seznam_1D[3:6]", seznam_1D[3:6])

# rez od indeksa 3 do konca s korakom 4
print("seznam_1D[3::4]", seznam_1D[3::4])

# rez od začetka do indeksa 8 s korakom 3
print("seznam_1D[:8:3]", seznam_1D[:8:3])

# rez od začetka do konca s korakom 4
print("seznam_1D[::4]", seznam_1D[::4])

# rez od začetka do indeksa 4
print("seznam_1D[:4:]", seznam_1D[:4:])

# rez od indeksa 4 do konca
print("seznam_1D[4::]", seznam_1D[4::])

# rez od indeksa -3 do konca
print("seznam_1D[-3:]", seznam_1D[-3:])

```

```
41 # rez od indeksa -5 do indeksa -2
42 print("seznam_1D[-5:-2]", seznam_1D[-5:-2])
43
44 # rez od indeksa -1 do začetka s korakom -2
45 print("seznam_1D[-1::-2]", seznam_1D[-1::-2])
46
47 # obrnjen seznam
48 print("seznam_1D[::-1]", seznam_1D[::-1])
49
50 ##########################
51 ##########################
52 #  UREJANJE 1D SEZNAMOV  #
53 ##########################
54 ##########################
55 print("1D urejanje")
56
57 seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
58 seznam_1D[1:8:2] = 0
59 print("seznam_1D[1:8:2] = 0 - >", seznam_1D)
60
61 seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
62 seznam_1D[3:-1:3] = [10, 20]
63 print("seznam_1D[3:-1:3] = [10, 20] - >", seznam_1D)
64
65 seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
66 seznam_1D[-5:-2] = [1, 2, 3]
67 print("seznam_1D[-5:-2] = [1, 2, 3] - >", seznam_1D)
68
69 seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
70 seznam_1D[-1::-2] = 15
71 print("seznam_1D[-1::-2] = 15 - >", seznam_1D)
72
73 ##########################
74 ##########################
75 #  REZANJE 2D SEZNAMOV  #
76 ##########################
77 ##########################
78 print("2D")
79
80 # pripravimo seznam
81 seznam_2D = np.array([[1, 2, 3, 4],
82                       [5, 6, 7, 8],
83                       [9, 10, 11, 12]])
84 print("seznam_2D\n", seznam_2D)
85
86 # prvi dve vrstici in stolpca
87 print("seznam_2D[:2, :2]\n", seznam_2D[:2, :2])
88
89 # zadnji dve vrstici in stolpca
```

```
print("seznam_2D[-2:, -2:]\n", seznam_2D[-2:, -2:])

# zadnji 1. in 3. vrstica in 2. in 4. stolpec
print("seznam_2D[0::2, 1::2]\n", seznam_2D[0::2, 1::2])

# celotna prva vrstica
print("seznam_2D[0, :]\n", seznam_2D[0, :])

# celoten drugi stolpce
print("seznam_2D[:, 1]\n", seznam_2D[:, 1])

##########################
##########################
# UREJANJE 2D SEZNAMOV  #
##########################
##########################
print("2D urejanje")

seznam_2D = np.array([[1, 2, 3, 4],
                      [5, 6, 7, 8],
                      [9, 10, 11, 12]])
seznam_2D[:2, :2] = 0
print("seznam_2D[:2, :2] = 0\n", seznam_2D)

seznam_2D = np.array([[1, 2, 3, 4],
                      [5, 6, 7, 8],
                      [9, 10, 11, 12]])
seznam_2D[-2:, -2:] = [[ 15,  16], [17, 18]]
print("seznam_2D[-2:, -2:] = [[ 15,  16], [17, 18]]\n", seznam_2D)

seznam_2D = np.array([[1, 2, 3, 4],
                      [5, 6, 7, 8],
                      [9, 10, 11, 12]])
seznam_2D[0::2, 1::2] = np.array([[2, 4], [10, 12]])
print("seznam_2D[0::2, 1::2] = np.array([[2, 4], [10, 12]])\n", seznam_2D)

seznam_2D = np.array([[1, 2, 3, 4],
                      [5, 6, 7, 8],
                      [9, 10, 11, 12]])
seznam_2D[0, :] = 15
print("seznam_2D[0, :] = 15\n", seznam_2D)

seznam_2D = np.array([[1, 2, 3, 4],
                      [5, 6, 7, 8],
                      [9, 10, 11, 12]])
seznam_2D[:, 1] = np.array([15, 16, 17])
print("seznam_2D[:, 1] = np.array([15, 16, 17])\n", seznam_2D)
```

Izpis rešitev

```
1D
seznam_1D [1 2 3 4 5 6 7 8 9]
seznam_1D[1:8:2] [2 4 6 8]
seznam_1D[3:-1:3] [4 7]
seznam_1D[3:6] [4 5 6]
seznam_1D[3::4] [4 8]
seznam_1D[:8:3] [1 4 7]
seznam_1D[::4] [1 5 9]
seznam_1D[:4:] [1 2 3 4]
seznam_1D[4::] [5 6 7 8 9]
seznam_1D[-3:] [7 8 9]
seznam_1D[-5:-2] [5 6 7]
seznam_1D[-1::-2] [9 7 5 3 1]
seznam_1D[::-1] [9 8 7 6 5 4 3 2 1]
1D urejanje
seznam_1D[1:8:2] = 0 - > [1 0 3 0 5 0 7 0 9]
seznam_1D[3:-1:3] = [10, 20] - > [ 1  2  3 10  5  6 20  8  9]
seznam_1D[-5:-2] = [1, 2, 3] - > [1 2 3 4 1 2 3 8 9]
seznam_1D[-1::-2] = 15 - > [15  2 15  4 15  6 15  8 15]
2D
seznam_2D
 [[ 1  2  3  4]
 [ 5  6  7  8]
 [ 9 10 11 12]]
seznam_2D[:2, :2]
 [[1 2]
 [5 6]]
seznam_2D[-2:, -2:]
 [[ 7  8]
 [11 12]]
seznam_2D[0::2, 1::2]
 [[ 2  4]
 [10 12]]
seznam_2D[0, :]
 [1 2 3 4]
seznam_2D[:, 1]
 [ 2  6 10]
2D urejanje
seznam_2D[:2, :2] = 0
 [[ 0  0  3  4]
 [ 0  0  7  8]
 [ 9 10 11 12]]
seznam_2D[-2:, -2:] = [[ 15,  16], [17, 18]]
 [[ 1  2  3  4]
 [ 5  6 15 16]
 [ 9 10 17 18]]
seznam_2D[0::2, 1::2] = np.array([[2, 4], [10, 12]])
 [[ 1  2  3  4]
```

```
 [ 5  6  7  8]
 [ 9 10 11 12]]
seznam_2D[0, :] = 15
 [[15 15 15 15]
 [ 5  6  7  8]
 [ 9 10 11 12]]
seznam_2D[:, 1] = np.array([15, 16, 17])
 [[ 1 15  3  4]
 [ 5 16  7  8]
 [ 9 17 11 12]]
```

2.4. Transponiranje seznamov

Funkcija `np.transpose()` nam omogoče transponiranje seznamov z naslednjo sintakso:

```
transponiran_seznam = np.transpose(originalen_seznam)
```

Pri 2D seznamih se pri transponiranju stolpci zamenjajo z vrsticami oziroma je obnašanje povsem identično kot pri transponiranju matrik. Na primer seznam:

```
seznam_2D = np.array([[1, 2],[3, 4]])
```

oziroma izpisana vrednost `seznam_2D`:

```
[[1 2]
 [3 4]]
```

se po transponiranju:

```
transponiran_seznam_2D = np.transpose(seznam_2D)
```

preoblikuje v:

```
[[1 3]
 [2 4]]
```

Namesto ukaza `np.transpose()` se lahko uporabi tudi skrajšana različica, kjer za matriko uporabimo izraz `.T`. V tem smislu sta si izraza `np.transpose(seznam_2D)` in `seznam_2D.T` povsem ekvivalentna.

Omogočeno je tudi transponiranje tri in več dimenzionalnih seznamov, kjer je potrebno navesti še dodaten argument, s katerim določimo, katere osi se bodo zamenjale med seboj.

```
transponiran_seznam = np.transpose(originalen_seznam,
```

```
nov_vrstni_red_osi)
```

2.4.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Transponiranje seznamov. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Pripravi seznam `seznam_1D`, ki je oblike [1, 2, 3, 4].
- Pripravi seznam `seznam_2D`, ki je oblike [[1, 2],[3, 4]].
- Pripravi seznam `seznam_3D`, ki je oblike [[[1, 2],[3, 4]],[[5, 6],[7, 8]]].
- Transponiraj seznam `seznam_1D` in ga shrani v spremenljivko `transponiran_seznam_1D`.
- Izpiši vrednosti originalnega in transponiranega seznama.
- Transponiraj seznam `seznam_2D` in ga shrani v spremenljivko `transponiran_seznam_2D`.
- Izpiši vrednosti originalnega in transponiranega seznama.
- Transponiraj seznam `seznam_3D`, kjer stolpci zamenjajo sloje, sloji zamenjajo vrstice, vrstice zamenjajo stolpce in ga shrani v spremenljivko `transponiran_seznam_3D`.
- Izpiši vrednosti originalnega in transponiranega seznama.

2.4.2. Rešitve

Programska koda

```
import numpy as np

##########################
##########################
#    transponiranje     #
##########################
##########################

# pripravimo originalne sezname
seznam_1D = np.array([1, 2, 3, 4])
seznam_2D = np.array([[1, 2],[3, 4]])
seznam_3D = np.array([[[1, 2],[3, 4]],[[5, 6],[7, 8]]])


# transponiramo 1d seznam
transponiran_seznam_1D = np.transpose(seznam_1D)
print("original 1D\n", seznam_1D)
print("transponiran 1D\n", transponiran_seznam_1D)

# transponiramo 2d seznam
transponiran_seznam_2D = np.transpose(seznam_2D)
print("original 2D\n", seznam_2D)
print("transponiran 2D\n", transponiran_seznam_2D)

```

```
25 # transponiramo 3d seznam z dodatnim argumentom (2, 0, 1)
26 # 2 - stolpci zamenjajo sloje
27 # 0 - sloji zamenjajo vrstice
28 # 1 - vrstice zamenjajo stolpce
29 transponiran_seznam_3D = np.transpose(seznam_3D, (2, 0, 1))
30 print("original 3D\n", seznam_3D)
31 print("transponiran 3D\n", transponiran_seznam_3D)
```

Izpis rešitev

```
original 1D
 [1 2 3 4]
transponiran 1D
 [1 2 3 4]
original 2D
 [[1 2]
 [3 4]]
transponiran 2D
 [[1 3]
 [2 4]]
original 3D
 [[[1 2]
  [3 4]]

 [[5 6]
  [7 8]]]
transponiran 3D
 [[[1 3]
  [5 7]]

 [[2 4]
  [6 8]]]
```

Poglavje 3. Matematične operacije

3.1. Aritmetične operacije na seznamih

Knjižnica *numpy_* ponuja širok nabor različnih operacij, ki jih lahko izvajamo na seznamih. Najbolj pogosto se uporabljajo naslednje aritmetične operacije:

Elementarna operacija	Operator	Funkcija
Seštevanje	`+`	`np.add()`
Odštevanje	`-`	`np.subtract()`
Množenje	`*`	`np.multiply()`
Deljenje	`/`	`np.divide()`
Potenciranje	`**`	`np.power()`
Modulus	`%`	`np.mod()`

Vse gornje funkcije oziroma operatorji delujejo po podobnem principu, in sicer lahko za vsako operacijo uporabimo ali povezani operator ali funkcijo. Primer uporabe si bomo pogledali na primeru **seštevanja**, kjer si za podatke izberemo naslednje spremenljivke:

```
seznam_1 = np.array([1, 2, 3, 4])
seznam_2 = np.array([5, 6, 7, 8])
skalar = 3
```

`seznam_1` in `seznam_2` lahko seštejemo med seboj, kar pomeni, da se bo izvedlo seštevanje po elementih, in sicer se med seboj seštejeta prva elementa (1 + 5 = 6), druga elementa (2 + 6 = 8), itd. To lahko storimo ali z uporabo operatorja `+`:

```
rezultat_1 = seznam_1 + seznam_2
```

ali s funkcijo `np.add()`:

```
rezultat_2 = np.add(seznam_1, seznam_2)
```

kjer v obeh primerih dobimo rezultat:

```
[6, 8, 10, 12]
```

Seštevamo lahko le sezname, ki so enakih dimenzij. V kolikor se dimenzije seznamov ne ujemajo, nam Python vrne napako.

Poleg seštevanja dveh seznamov je možno tudi seštevanje med seznamom in skalarjem:

```
rezultat_3 = seznam_1 + skalar
```

kjer se vsakemu elementu v seznamu `seznam_1` prišteje vrednost `skalar` in dobimo rezultat:

```
[4, 5, 6, 7]
```

3.1.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Aritmetične operacije na seznamih. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- pripravi seznam `seznam_1`, ki je oblike [1, 2, 3, 4], seznam `seznam_2`, ki je oblike [5, 6, 7, 8] in sklar `skalar = 3`.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seštej seznam `seznam_1` in seznam `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seštej seznam `seznam_1` in skalar `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije od seznama `seznam_1` odštej `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije od seznama `seznam_1` odštej `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije zmnoži seznama `seznam_1` in `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije zmnoži seznam `seznam_1` in skalar `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seznam `seznam_1` deli s `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seznam `seznam_1` deli s skalarjem `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije skalar `skalar` deli s `seznam_1` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije elemente seznama `seznam_1` potenciraj z elementi seznama `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije elemente seznama `seznam_1` potenciraj s skalarjem `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije skalar `skalar` potenciraj z elementi seznama `seznam_1` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije določi ostanek (modulus), če elemente seznama `seznam_1` deliš z elementi seznama `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije določi ostanek (modulus), če elemente seznama `seznam_1` deliš s skalarjem `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije določi ostanek (modulus), če skalar `skalar` deliš z elementi seznama `seznam_1` ter izpiši rezultate.
- pripravi seznam `seznam_1`, ki je oblike [[1, 2, 3, 4],[5, 6, 7, 8]], seznam `seznam_2`, ki je oblike [[1, 2, 1, 2],[3, 4, 3, 4]] in sklar `skalar = 3`.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seštej seznam `seznam_1` in seznam `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seštej seznam `seznam_1` in skalar `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije od seznama `seznam_1` odštej `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije od seznama `seznam_1` odštej `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije zmnoži seznama `seznam_1` in `seznam_2` ter izpiši rezultate.

- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije zmnoži seznam `seznam_1` in skalar `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seznam `seznam_1` deli s `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije seznam `seznam_1` deli s skalarjem `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije skalar `skalar` deli s `seznam_1` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije elemente seznama `seznam_1` potenciraj z elementi seznama `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije elemente seznama `seznam_1` potenciraj s skalarjem `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije skalar `skalar` potenciraj z elementi seznama `seznam_1` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije določi ostanek (modulus), če elemente seznama `seznam_1` deliš z elementi seznama `seznam_2` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije določi ostanek (modulus), če elemente seznama `seznam_1` deliš s skalarjem `skalar` ter izpiši rezultate.
- Z uporabo operatorja ter z uporabo funkcije določi ostanek (modulus), če skalar `skalar` deliš z elementi seznama `seznam_1` ter izpiši rezultate.

3.1.2. Rešitve

Programska koda

```
1 import numpy as np
2
3 ############
4 # 1D seznami
5 ############
6 print("#"*10)
7 print("1D seznami")
8 print("#"*10)
9
10 seznam_1 = np.array([1, 2, 3, 4])
11 seznam_2 = np.array([5, 6, 7, 8])
12 skalar = 3
13 print("seznam_1\n", seznam_1)
14 print("seznam_2\n", seznam_2)
15 print("skalar\n", skalar)
16
17 # seštevanje dveh seznamov
18 rez_seštevanje_1 = seznam_1 + seznam_2
19 rez_seštevanje_2 = np.add(seznam_1, seznam_2)
20 print("seštevanje dveh seznamov s + in z  np.add():\n", rez_seštevanje_1,"\n",
   rez_seštevanje_2)
21
22 # seštevanje seznama s skalarjem
23 rez_seštevanje_3 = seznam_1 + skalar
24 rez_seštevanje_4 = np.add(seznam_1, skalar)
```

```
25 print("seštevanje seznama s skalarjem s + in z np.add():\n", rez_seštevanje_3,"\n
   ", rez_seštevanje_4)
26
27
28 # odštevanje dveh seznamov
29 rez_odštevanje_1 = seznam_1 - seznam_2
30 rez_odštevanje_2 = np.subtract(seznam_1, seznam_2)
31 print("odštevanje dveh seznamov z - in z  np.subtract():\n", rez_odštevanje_1,"\n
   ", rez_odštevanje_2)
32
33 # odštevanje seznama s skalarjem
34 rez_odštevanje_3 = seznam_1 - skalar
35 rez_odštevanje_4 = np.subtract(seznam_1, skalar)
36 print("odštevanje seznama s skalarjem z - in z np.subtract():\n",
   rez_odštevanje_3,"\n", rez_odštevanje_4)
37
38 # množenje dveh seznamov
39 rez_množenje_1 = seznam_1 * seznam_2
40 rez_množenje_2 = np.multiply(seznam_1, seznam_2)
41 print("množenje dveh seznamov z * in z  np.multiply():\n", rez_množenje_1,"\n",
   rez_množenje_2)
42
43 # množenje seznama s skalarjem
44 rez_množenje_3 = seznam_1 * skalar
45 rez_množenje_4 = np.multiply(seznam_1, skalar)
46 print("množenje seznama s skalarjem z * in z np.multiply():\n", rez_množenje_3,"
   \n", rez_množenje_4)
47
48 # deljenje dveh seznamov
49 rez_deljenje_1 = seznam_1 / seznam_2
50 rez_deljenje_2 = np.divide(seznam_1, seznam_2)
51 print("deljenje dveh seznamov z / in z  np.divide():\n", rez_deljenje_1,"\n",
   rez_deljenje_2)
52
53 # deljenje seznama s skalarjem
54 rez_deljenje_3 = seznam_1 / skalar
55 rez_deljenje_4 = np.divide(seznam_1, skalar)
56 print("deljenje seznama s skalarjem z / in z np.divide():\n", rez_deljenje_3,"\n",
   rez_deljenje_4)
57
58 # deljenje skalarja s seznamom
59 rez_deljenje_5 = skalar / seznam_1
60 rez_deljenje_6 = np.divide(skalar, seznam_1)
61 print("deljenje skalarja s seznamom z / in z np.divide():\n", rez_deljenje_5,"\n",
   rez_deljenje_6)
62
63 # potenciranje dveh seznamov
64 rez_potenciranje_1 = seznam_1 ** seznam_2
65 rez_potenciranje_2 = np.power(seznam_1, seznam_2)
```

```
66 print("potenciranje dveh seznamov z ** in z  np.power():\n", rez_potenciranje_1,
   "\n", rez_potenciranje_2)
67
68 # potenciranje seznama s skalarjem
69 rez_potenciranje_3 = seznam_1 ** skalar
70 rez_potenciranje_4 = np.power(seznam_1, skalar)
71 print("potenciranje seznama s skalarjem z ** in z np.power():\n",
   rez_potenciranje_3,"\n", rez_potenciranje_4)
72
73 # potenciranje skalarja s seznamom
74 rez_potenciranje_5 = skalar ** seznam_1
75 rez_potenciranje_6 = np.power(skalar, seznam_1)
76 print("potenciranje skalarja s seznamom z ** in z np.power():\n",
   rez_potenciranje_5,"\n", rez_potenciranje_6)
77
78 # modulus dveh seznamov
79 rez_modulus_1 = seznam_1 % seznam_2
80 rez_modulus_2 = np.mod(seznam_1, seznam_2)
81 print("modulus dveh seznamov z % in z  np.mod():\n", rez_modulus_1,"\n",
   rez_modulus_2)
82
83 # modulus seznama s skalarjem
84 rez_modulus_3 = seznam_1 % skalar
85 rez_modulus_4 = np.mod(seznam_1, skalar)
86 print("modulus seznama s skalarjem z % in z np.mod():\n", rez_modulus_3,"\n",
   rez_modulus_4)
87
88 # modulus skalarja s seznamom
89 rez_modulus_5 = skalar % seznam_1
90 rez_modulus_6 = np.mod(skalar, seznam_1)
91 print("modulus skalarja s seznamom z % in z np.mod():\n", rez_modulus_5,"\n",
   rez_modulus_6)
92
93 ############
94 # 2D seznami
95 ############
96 print("#"*10)
97 print("2D seznami")
98 print("#"*10)
99
100 seznam_1 = np.array([[1, 2, 3, 4],[5, 6, 7, 8]])
101 seznam_2 = np.array([[1, 2, 1, 2],[3, 4, 3, 4]])
102 skalar = 3
103 print("seznam_1\n", seznam_1)
104 print("seznam_2\n", seznam_2)
105 print("skalar\n", skalar)
106
107 # seštevanje dveh seznamov
108 rez_seštevanje_1 = seznam_1 + seznam_2
```

```
109 rez_seštevanje_2 = np.add(seznam_1, seznam_2)
110 print("seštevanje dveh seznamov s + in z  np.add():\n", rez_seštevanje_1,"\n",
    rez_seštevanje_2)
111
112 # seštevanje seznama s skalarjem
113 rez_seštevanje_3 = seznam_1 + skalar
114 rez_seštevanje_4 = np.add(seznam_1, skalar)
115 print("seštevanje seznama s skalarjem s + in z np.add():\n", rez_seštevanje_3,"\n
    ", rez_seštevanje_4)
116
117 # odštevanje dveh seznamov
118 rez_odštevanje_1 = seznam_1 - seznam_2
119 rez_odštevanje_2 = np.subtract(seznam_1, seznam_2)
120 print("odštevanje dveh seznamov z - in z  np.subtract():\n", rez_odštevanje_1,"\n
    ", rez_odštevanje_2)
121
122 # odštevanje seznama s skalarjem
123 rez_odštevanje_3 = seznam_1 - skalar
124 rez_odštevanje_4 = np.subtract(seznam_1, skalar)
125 print("odštevanje seznama s skalarjem z - in z np.subtract():\n",
    rez_odštevanje_3,"\n", rez_odštevanje_4)
126
127 # množenje dveh seznamov
128 rez_množenje_1 = seznam_1 * seznam_2
129 rez_množenje_2 = np.multiply(seznam_1, seznam_2)
130 print("množenje dveh seznamov z * in z  np.multiply():\n", rez_množenje_1,"\n",
    rez_množenje_2)
131
132 # množenje seznama s skalarjem
133 rez_množenje_3 = seznam_1 * skalar
134 rez_množenje_4 = np.multiply(seznam_1, skalar)
135 print("množenje seznama s skalarjem z * in z np.multiply():\n", rez_množenje_3,"
    \n", rez_množenje_4)
136
137 # deljenje dveh seznamov
138 rez_deljenje_1 = seznam_1 / seznam_2
139 rez_deljenje_2 = np.divide(seznam_1, seznam_2)
140 print("deljenje dveh seznamov z / in z  np.divide():\n", rez_deljenje_1,"\n",
    rez_deljenje_2)
141
142 # deljenje seznama s skalarjem
143 rez_deljenje_3 = seznam_1 / skalar
144 rez_deljenje_4 = np.divide(seznam_1, skalar)
145 print("deljenje seznama s skalarjem z / in z np.divide():\n", rez_deljenje_3,"\n",
    rez_deljenje_4)
146
147 # deljenje skalarja s seznamom
148 rez_deljenje_5 = skalar / seznam_1
149 rez_deljenje_6 = np.divide(skalar, seznam_1)
```

```
150 print("deljenje skalarja s seznamom z / in z np.divide():\n", rez_deljenje_5,"\n",
    rez_deljenje_6)
151
152 # potenciranje dveh seznamov
153 rez_potenciranje_1 = seznam_1 ** seznam_2
154 rez_potenciranje_2 = np.power(seznam_1, seznam_2)
155 print("potenciranje dveh seznamov z ** in z  np.power():\n", rez_potenciranje_1,
    "\n", rez_potenciranje_2)
156
157 # potenciranje seznama s skalarjem
158 rez_potenciranje_3 = seznam_1 ** skalar
159 rez_potenciranje_4 = np.power(seznam_1, skalar)
160 print("potenciranje seznama s skalarjem z ** in z np.power():\n",
    rez_potenciranje_3,"\n", rez_potenciranje_4)
161
162 # potenciranje skalarja s seznamom
163 rez_potenciranje_5 = skalar ** seznam_1
164 rez_potenciranje_6 = np.power(skalar, seznam_1)
165 print("potenciranje skalarja s seznamom z ** in z np.power():\n",
    rez_potenciranje_5,"\n", rez_potenciranje_6)
166
167 # modulus dveh seznamov
168 rez_modulus_1 = seznam_1 % seznam_2
169 rez_modulus_2 = np.mod(seznam_1, seznam_2)
170 print("modulus dveh seznamov z % in z  np.mod():\n", rez_modulus_1,"\n",
    rez_modulus_2)
171
172 # modulus seznama s skalarjem
173 rez_modulus_3 = seznam_1 % skalar
174 rez_modulus_4 = np.mod(seznam_1, skalar)
175 print("modulus seznama s skalarjem z % in z np.mod():\n", rez_modulus_3,"\n",
    rez_modulus_4)
176
177 # modulus skalarja s seznamom
178 rez_modulus_5 = skalar % seznam_1
179 rez_modulus_6 = np.mod(skalar, seznam_1)
180 print("modulus skalarja s seznamom z % in z np.mod():\n", rez_modulus_5,"\n",
    rez_modulus_6)
```

Izpis rešitev

```
##########
1D seznami
##########
seznam_1
 [1 2 3 4]
seznam_2
 [5 6 7 8]
skalar
```

```
 3
seštevanje dveh seznamov s + in z  np.add():
 [ 6  8 10 12]
 [ 6  8 10 12]
seštevanje seznama s skalarjem s + in z np.add():
 [4 5 6 7]
 [4 5 6 7]
odštevanje dveh seznamov z - in z  np.subtract():
 [-4 -4 -4 -4]
 [-4 -4 -4 -4]
odštevanje seznama s skalarjem z - in z np.subtract():
 [-2 -1  0  1]
 [-2 -1  0  1]
množenje dveh seznamov z * in z  np.multiply():
 [ 5 12 21 32]
 [ 5 12 21 32]
množenje seznama s skalarjem z * in z np.multiply():
 [ 3  6  9 12]
 [ 3  6  9 12]
deljenje dveh seznamov z / in z  np.divide():
 [0.2        0.33333333 0.42857143 0.5       ]
 [0.2        0.33333333 0.42857143 0.5       ]
deljenje seznama s skalarjem z / in z np.divide():
 [0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333]
 [0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333]
deljenje skalarja s seznamom z / in z np.divide():
 [3.   1.5  1.   0.75]
 [3.   1.5  1.   0.75]
potenciranje dveh seznamov z ** in z  np.power():
 [    1    64  2187 65536]
 [    1    64  2187 65536]
potenciranje seznama s skalarjem z ** in z np.power():
 [ 1  8 27 64]
 [ 1  8 27 64]
potenciranje skalarja s seznamom z ** in z np.power():
 [ 3  9 27 81]
 [ 3  9 27 81]
modulus dveh seznamov z % in z  np.mod():
 [1 2 3 4]
 [1 2 3 4]
modulus seznama s skalarjem z % in z np.mod():
 [1 2 0 1]
 [1 2 0 1]
modulus skalarja s seznamom z % in z np.mod():
 [0 1 0 3]
 [0 1 0 3]
##########
2D seznami
##########
```

```
seznam_1
 [[1 2 3 4]
 [5 6 7 8]]
seznam_2
 [[1 2 1 2]
 [3 4 3 4]]
skalar
 3
seštevanje dveh seznamov s + in z  np.add():
 [[ 2  4  4  6]
 [ 8 10 10 12]]
 [[ 2  4  4  6]
 [ 8 10 10 12]]
seštevanje seznama s skalarjem s + in z np.add():
 [[ 4  5  6  7]
 [ 8  9 10 11]]
 [[ 4  5  6  7]
 [ 8  9 10 11]]
odštevanje dveh seznamov z - in z  np.subtract():
 [[0 0 2 2]
 [2 2 4 4]]
 [[0 0 2 2]
 [2 2 4 4]]
odštevanje seznama s skalarjem z - in z np.subtract():
 [[-2 -1  0  1]
 [ 2  3  4  5]]
 [[-2 -1  0  1]
 [ 2  3  4  5]]
množenje dveh seznamov z * in z  np.multiply():
 [[ 1  4  3  8]
 [15 24 21 32]]
 [[ 1  4  3  8]
 [15 24 21 32]]
množenje seznama s skalarjem z * in z np.multiply():
 [[ 3  6  9 12]
 [15 18 21 24]]
 [[ 3  6  9 12]
 [15 18 21 24]]
deljenje dveh seznamov z / in z  np.divide():
 [[1.         1.         3.         2.        ]
 [1.66666667 1.5        2.33333333 2.        ]]
 [[1.         1.         3.         2.        ]
 [1.66666667 1.5        2.33333333 2.        ]]
deljenje seznama s skalarjem z / in z np.divide():
 [[0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333]
 [1.66666667 2.         2.33333333 2.66666667]]
 [[0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333]
 [1.66666667 2.         2.33333333 2.66666667]]
deljenje skalarja s seznamom z / in z np.divide():
```

```
 [[3.         1.5        1.         0.75      ]
 [0.6        0.5        0.42857143 0.375     ]]
 [[3.         1.5        1.         0.75      ]
 [0.6        0.5        0.42857143 0.375     ]]
potenciranje dveh seznamov z ** in z  np.power():
 [[   1    4    3   16]
 [ 125 1296  343 4096]]
 [[   1    4    3   16]
 [ 125 1296  343 4096]]
potenciranje seznama s skalarjem z ** in z np.power():
 [[  1   8  27  64]
 [125 216 343 512]]
 [[  1   8  27  64]
 [125 216 343 512]]
potenciranje skalarja s seznamom z ** in z np.power():
 [[   3    9   27   81]
 [ 243  729 2187 6561]]
 [[   3    9   27   81]
 [ 243  729 2187 6561]]
modulus dveh seznamov z % in z  np.mod():
 [[0 0 0 0]
 [2 2 1 0]]
 [[0 0 0 0]
 [2 2 1 0]]
modulus seznama s skalarjem z % in z np.mod():
 [[1 2 0 1]
 [2 0 1 2]]
 [[1 2 0 1]
 [2 0 1 2]]
modulus skalarja s seznamom z % in z np.mod():
 [[0 1 0 3]
 [3 3 3 3]]
 [[0 1 0 3]
 [3 3 3 3]]
```

3.2. Kotne funkcije

V spodnji tabeli so navedene najbolj pogosto uporabljene kotne funkcije v knjižnici *numpy*.

Kotne funkcije	Opis
`np.sin()`	Izračuna sinus kota podanega v radianih.
`np.cos()`	Izračuna kosinus kota podanega v radianih.
`np.tan()`	Izračuna tangens kota podanega v radianih.
`np.arcsin()`	Izračuna inverz sinusa.
`np.arccos()`	Izračuna inverz kosinusa.
`np.arctan()`	Izračuna inverz tangensa.
`np.degrees()`	Pretvori kot iz radianov v stopinje.

`np.radians()`	Pretvori kot iz stopinj v radiane.

Podobno kot ostale funkcije v knjižnici, tudi kotne funkcije delujejo na celotnem seznamu. Na primer kosinuse za seznam izračunamo kot:

```
koti = np.array([0, 1, 2])
kosinusi = np.cos(koti)
print(kosinusi) # izpis: [1. 0.54030231 -0.41614684]
```

kjer je potrebno paziti, da kote podajamo v radianih.

Pri kotnih funkcijah `np.sin()`, `np.cos()` in `np.tan()` je kote potrebno podati v radianih. Podobno tudi inverzne funkcije `np.arcsin()` , `np.arccos()` in `np.arctan()` vrnejo rezultat v radianih.

Če bi radi iz vrednosti kosinusov dobili vrednosti kotov, to naredimo z inverzno funkcijo `np.arccos()`:

```
vrednosti_kotov = np.arccos(kosinusi)
print(vrednosti_kotov) # izpis: [0. 1. 2.]
```

V pomoč pri pretvorbi med radiani in stopinjami je funkcija `np.degrees()`, ki pretvori vrednost kotov iz radianov v stopinje:

```
koti_stopinje = np.degrees(koti)
print(koti_stopinje) # izpis: [0. 57.29577951 114.59155903]
```

V obratni smeri lahko uporabimo funkcijo `np.radians()`, ki pretvori vrednosti kotov iz stopinj v radiane:

```
koti_radiani = np.radians(koti_stopinje)
print(koti_radiani) # izpis: [0. 1. 2.]
```

3.2.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Kotne funkcije. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Definiraj seznam kotov v stopinjah z naslednjimi vrednostmi: 0, 15, 30, 45, 60, 90, 270, 360.
- Pretvori kote v radiane.
- pretvori kote nazaj v stopinje.
- Določi sinuse kotov.
- Določi inverze sinusov.
- Določi kosinuse kotov.
- Določi inverze kosinusov.
- Preveri, če za poljuben kot `a` velja `sin(a)^2 + cos(a)^2 = 1`.

- Določi tangense kotov.
- Določi inverze tangensov.

3.2.2. Rešitve

Programska koda

```
import numpy as np

# seznam kotov v stopinjah
koti_stopinje = np.array([0, 15, 30, 45, 60, 90, 270, 360])
print("koti_stopinje\n", koti_stopinje)

# pretvorba kotov v radiane
koti_radiani = np.radians(koti_stopinje)
print("koti_radiani\n", koti_radiani)

#pretvorba iz radianov v stopinje
koti_stopinje2 = np.degrees(koti_radiani)
print("koti_stopinje2\n", koti_stopinje2)

# izračun sinusov
vrednosti_sin = np.sin(koti_radiani)
print("sinusi\n", vrednosti_sin)

#izračun arcsin
vrednosti_arcsin = np.arcsin(vrednosti_sin)
print("vrednosti_arcsin\n", vrednosti_arcsin)

# izračun kosinusov
vrednosti_cos = np.cos(koti_radiani)
print("sinusi\n", vrednosti_cos)

#izračun arccos
vrednosti_arccos = np.arccos(vrednosti_cos)
print("vrednosti_arccos\n", vrednosti_arccos)

# preverimo če velja sin(alfa) ** 2 + cos(alfa) ** 2 = 1
vsota_kvadratov = vrednosti_cos ** 2 + vrednosti_sin ** 2
print("vsota_kvadratov\n", vsota_kvadratov)

# izračun tangensov
vrednosti_tan = np.tan(koti_radiani)
print("vrednosti_tan\n", vrednosti_tan)

#izračun arctan
vrednosti_arctan = np.arctan(vrednosti_tan)
print("vrednosti_arctan\n", vrednosti_arctan)
```

Izpis rešitev

```
koti_stopinje
 [  0  15  30  45  60  90 270 360]
koti_radiani
 [0.         0.26179939 0.52359878 0.78539816 1.04719755 1.57079633
 4.71238898 6.28318531]
koti_stopinje2
 [  0.  15.  30.  45.  60.  90. 270. 360.]
sinusi
 [ 0.00000000e+00  2.58819045e-01  5.00000000e-01  7.07106781e-01
  8.66025404e-01  1.00000000e+00 -1.00000000e+00 -2.44929360e-16]
vrednosti_arcsin
 [ 0.00000000e+00  2.61799388e-01  5.23598776e-01  7.85398163e-01
  1.04719755e+00  1.57079633e+00 -1.57079633e+00 -2.44929360e-16]
sinusi
 [ 1.00000000e+00  9.65925826e-01  8.66025404e-01  7.07106781e-01
  5.00000000e-01  6.12323400e-17 -1.83697020e-16  1.00000000e+00]
vrednosti_arccos
 [0.         0.26179939 0.52359878 0.78539816 1.04719755 1.57079633
 1.57079633 0.        ]
vsota_kvadratov
 [1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]
vrednosti_tan
 [ 0.00000000e+00  2.67949192e-01  5.77350269e-01  1.00000000e+00
  1.73205081e+00  1.63312394e+16  5.44374645e+15 -2.44929360e-16]
vrednosti_arctan
 [ 0.00000000e+00  2.61799388e-01  5.23598776e-01  7.85398163e-01
  1.04719755e+00  1.57079633e+00  1.57079633e+00 -2.44929360e-16]
```

3.3. Ostale matematične funkcije

V spodnji tabeli so navedene preostale pogosto uporabljene matematične funkcije v knjižnici *numpy*.

Funkcije	Opis
`np.prod()`	Izračuna produkt vseh elementov v seznamu.
`np.sum()`	Izračuna vsoto vseh elementov v seznamu.
`np.exp()`	Izračuna naravno eksponentno funkcijo za vsak element.
`np.log()`	Izračuna naravna logaritem za vsak element.
`np.log10()`	Izračuna logaritem z osnovo 10 za vsak element.
`np.log2()`	Izračuna logaritem z osnovo 2 za vsak element.
`np.sqrt()`	Izračuna kvadratni koren za vsak element.
`np.cbrt()`	Izračuna kubični koren za vsak element.
`np.absolute()`	Izračuna absolutno vrednost za vsak element.
`np.sign()`	Izračuna predznak za vsak element.

Večina zornjih funkcije deluje na posameznem elementu v seznamu. Drugače delujeta le funkciji `np.prod()` in `np.sum()`, ki vrneta eno vrednost za celoten seznam. Na primer:

```
seznam = np.array([0, 1, 2])
vsota = np.sum(seznam)
print(vsota) # izpis: 3
```

izračuna vsoto vseh elementov v seznamu.

Vse preostale funkcije izračunajo vrednost za vsak element posebej. Na primer:

```
seznam = np.array([0, 1, 2])
koreni = np.sqrt(seznam)
print(koreni) # izpis: [0. 1. 1.41421356]
```

izračuna kvadratni koren za vsak element posebej.

3.3.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljeni v razdelku Ostale matematične funkcije. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Pripravi seznam `seznam_1D`, ki vsebuje 5 naključnih števil.
- Pripravi seznam `seznam_2D`, ki ima 2 vrstici in 3 stolpce in vsebuje poljubna števila določena z normalno porazdelitvijo.
- Določi produkt vseh elementov seznama `seznam_1D`.
- Določi vsoto vseh elementov seznama `seznam_2D`.
- Izračunaj vrednosti eksponentne funkcije za elemente seznama `seznam_1D`.
- Izračunaj naravni logaritem za elemente seznama `seznam_2D`.
- Izračunaj logaritem z osnovo 10 za elemente seznama `seznam_1D`.
- Izračunaj logaritem z osnovo 2 za elemente seznama `seznam_1D`.
- Izračunaj kvadratni koren za elemente seznama `seznam_1D`.
- izračunaj kubični koren za elemente seznama `seznam_2D`.
- Izračunaj absolutne vrednosti elementov seznama `seznam_2D`.
- Izračunaj predznake elementov seznama `seznam_1D`.

3.3.2. Rešitve

Programska koda

```
1 import numpy as np
2
3 # definicija seznamov
4 seznam_1D = np.random.rand(5)
5 print("seznam_1D", seznam_1D)
```

```
seznam_2D = np.random.randn(2,3)
print("seznam_2D", seznam_2D)

# produkt vseh elementov
rezultat_prod = np.prod(seznam_1D)
print("rezultat_prod",rezultat_prod)

# vsota vseh elementov
rezultat_sum = np.sum(seznam_2D)
print("rezultat_sum",rezultat_sum)

# naravna eksponentna funkcija po elementih
rezultat_exp = np.exp(seznam_1D)
print("rezultat_exp",rezultat_exp)

# naravna logaritem po elementih
rezultat_log = np.log(seznam_1D)
print("rezultat_log",rezultat_log)

# logaritem z osnovo 10 po elementih
rezultat_log10 = np.log10(seznam_1D)
print("rezultat_log10",rezultat_log10)

# logaritem z osnovo 2 po elementih
rezultat_log2 = np.log2(seznam_1D)
print("rezultat_log2",rezultat_log2)

# kvadratni koren po elementih
rezultat_sqrt = np.sqrt(seznam_1D)
print("rezultat_sqrt",rezultat_sqrt)

# kubični koren po elementih
rezultat_cbrt = np.cbrt(seznam_2D)
print("rezultat_cbrt",rezultat_cbrt)

# absolutna vrednost po elementih
rezultat_absolute = np.absolute(seznam_2D)
print("rezultat_absolute",rezultat_absolute)

# predznak po elementih
rezultat_sign = np.sign(seznam_1D)
print("rezultat_sign",rezultat_sign)
```

Izpis rešitev

```
seznam_1D [0.15045323 0.46157697 0.54943333 0.50234396 0.09848053]
seznam_2D [[-0.54018629 -0.94752376  1.18359164]
 [-0.20011211  0.77969094 -0.6332221 ]]
rezultat_prod 0.0018876097941248652
```

```
rezultat_sum -0.357761661515104
rezultat_exp [1.16236094 1.58657399 1.73227112 1.65259033 1.10349292]
rezultat_log [-1.89410302 -0.77310646 -0.59886783 -0.68847022 -2.31789637]
rezultat_log10 [-0.82259849 -0.33575587 -0.260085   -0.29899882 -1.0066496 ]
rezultat_log2 [-2.73261303 -1.11535686 -0.86398365 -0.99325258 -3.3440176 ]
rezultat_sqrt [0.38788301 0.67939456 0.7412377  0.70876227 0.31381608]
rezultat_cbrt [[-0.81441891 -0.9821927   1.05779286]
 [-0.58491279  0.92039481 -0.85872087]]
rezultat_absolute [[0.54018629 0.94752376 1.18359164]
 [0.20011211 0.77969094 0.6332221 ]]
rezultat_sign [1. 1. 1. 1. 1.]
```

3.4. Matrične operacije

3.4.1. Matrični in vektorski produkti

Knjižnica *numpy* ponuja vrsto različnih matričnih in vektorskih operacij. Najpomembnejše, iz inženirskega stališča, so navedene v spodnji tabeli.

Funkcija	Opis
`np.dot()`	Produkt dveh matrik.
`np.linalg.multi_dot()`	Produkt dveh ali več matrik.
`np.vdot()`	Skalarni produkt dveh vektorjev.
`np.linalg.inv()`	Izračuna inverz (obrnljive) matrike.

Za produkt spodnjih dveh matrik:

```
matrika_1 = np.array([[1, 2], [3, 4]])
matrika_2 = np.array([[5, 6], [7, 8]])
```

lahko uporabimo funkciji `np.dot()`:

```
rezultat_dot = np.dot(matrika_1, matrika_2)
```

ki nam vrne seznam oblike:

```
[[19 22]
 [43 50]]
```

V kolikor bi radi izvrednotili produkt večih matrik, lahko večkrat uporabimo funkcijo `np.dot()`, ali pa uporabimo funkcijo `np.linalg.multi_dot()`, ki z enim ukazom izvrednoti večkratno operacijo. Na primer:

```
rezultat_multi_dot = np.linalg.multi_dot((matrika_1,matrika_2,matrika_1))
```

vrne naslednjo matriko:

```
[[ 85 126]
 [193 286]]
```

V primeru dveh vektorjev:

```
vektor_1 = np.array([1, 2, 3, 4])
vektor_2 = np.array([5, 6, 7, 8])
```

lahko za skalarni produkt uporabimo funkcijo `np.dot()` ali pa funkcijo `np.vdot()`:

```
rezultat_dot = np.vdot(vektor_1, vektor_2)
rezultat_vdot = np.vdot(vektor_1, vektor_2)
```

kjer za zgornji primer obe funkciji vrneta vrednost `70`.

Inverze matrik določimo s funkcijo `np.linalg.inv()`. Na primer matriko `matrika_1` lahko obrnemo z naslednjo programsko kodo:

```
inverz_marika_1 = np.linalg.inv(matrika_1)
```

kjer je rezultat oblike:

```
[[-2. 1.]
 [1.5 -0.5]]
```

3.4.2. Norme in druge lastnosti matrik

V spodnji tabeli so povzete funkcije, s katerimi določimo najpomembnejše lastnosti matrik.

Funkcija	Opis
`np.linalg.norm()`	Izračun matrične ali vektorske norme.
`np.linalg.det()`	Izračun determinante matrike.
`np.linalg.matrix_rank()`	Izračun ranga matrike.
`np.trace()`	Izračun sledi matrike.

Spodnji matriki:

```
matrika = np.array([[1, 2], [3, 4]])
```

lahko določimo matrično normo:

```
norma_matrike = np.linalg.norm(matrika)
print(norma_matrike) # izpis: 5.477225575051661
```

njeno determinanto:

```
determinanta_matrike = np.linalg.det(matrika)
print(determinanta_matrike) # izpis: -2.0000000000000004
```

rang matrike:

```
rang_matrike = np.linalg.matrix_rank(matrika)
print(rang_matrike) # izpis: 2
```

in sled matrike:

```
sled_matrike = np.trace(matrika)
print(sled_matrike) # izpis: 5
```

3.4.3. Lastne vrednosti matrik

Za določitev lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrik se uporabljata naslednji funkciji.

Funkcija	Opis
`np.linalg.eig()`	Izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev kvadratne matrike.
`np.linalg.eigvals()`	Izračun lastnih vrednosti matrike.

Funkcija `np.linalg.eig()` vrne tako lastne vrednosti kakor tudi lastne vektorje matrike. Na primer:

```
matrika = np.array([[1, 2], [3, 4]])
rezultat_eig = np.linalg.eig(matrika)
```

kjer je rezultat naslednje oblike:

```
(array([-0.37228132,  5.37228132]),
array([[-0.82456484, -0.41597356],
       [ 0.56576746, -0.90937671]]))
```

Funkcija `np.linalg.eigvals()` pa vrne le lastne vrednosti:

```
rezultat_eigvals = np.linalg.eigvals(matrika)
print(rezultat_eigvals) # izpis: [-0.37228132 5.37228132]
```

3.4.4. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Matrične operacije. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Definiraj seznam `napetosti`, v katerega shraniš napetostni tenzor [[1, 0, 0], [0, 3, -1], [0, -1, 3]].
- Določi in izpiši normo napetostnega tenzorja `norma`.
- Določi in izpiši determinanto napetostnega tenzorja `determinanta`.
- Določi in izpiši rang napetostnega tenzorja `rang`.
- Določi in izpiši sled napetostnega tenzorja `sled`.
- Določi in izpiši lastne vrednosti in lastne vektorje napetostnega tenzorja, vrednosti shrani v seznam `vrednosti`, vektorje pa v seznam `vektorji`.
- S funkcijo `np.diag()` definiraj in izpiši matriko `napetosti_glavne`, ki po diagonali vsebuje lastne vrednosti napetostnega tenzorja.
- Določi matriko `napetosti_glavne_2`, ki jo izračunaš kot `(vektorji^(-1)).napetost.vektorji` in preveri, ali je enaka kot matrika `napetosti_glavne`.

3.4.5. Rešitve

programska koda

```
import numpy as np

# tenzor napetosti
napetost = np.array([[1, 0, 0], [0, 3, -1], [0, -1, 3]])

# norma
norma = np.linalg.norm(napetost)
print("norma:", norma)

# determinanta
determinanta = np.linalg.det(napetost)
print("determinanta:", determinanta)

# rang
rang = np.linalg.matrix_rank(napetost)
print("rang:", rang)

# sled
sled = np.trace(napetost)
print("sled:", sled)

#lastne vrednosti in vektorji
vrednosti, vektorji = np.linalg.eig(napetost)
print("lastne vrednosti:", vrednosti)
print("lastni vektorji:\n", vektorji)

#diagonalna matrika
```

```
28 napetosti_glavne = np.diag(vrednosti)
29 print("napetosti_glavne:\n", napetosti_glavne)
30
31 #diagonalno matrika s transofrmacijo
32 napetosti_glavne_2 = np.linalg.multi_dot((np.linalg.inv(vektorji), napetost,
   vektorji))
33 print("napetosti_glavne_2:\n", napetosti_glavne_2)
```

Izpis rešitev

```
norma: 4.58257569495584
determinanta: 8.000000000000002
rang: 3
sled: 7
lastne vrednosti: [4. 2. 1.]
lastni vektorji:
 [[ 0.          0.          1.        ]
 [-0.70710678  0.70710678  0.        ]
 [ 0.70710678  0.70710678  0.        ]]
napetosti_glavne:
 [[4. 0. 0.]
 [0. 2. 0.]
 [0. 0. 1.]]
napetosti_glavne_2:
 [[ 4.00000000e+00 -2.02930727e-17  0.00000000e+00]
 [-4.05861454e-17  2.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.00000000e+00]]
```

Poglavje 4. Dodatne funkcionalnosti

4.1. Reševanje enačb

Pri reševanju sistemov linarnih enačb si lahko pomagamo s spodnjimi funkcijami.

Funkcija	Opis
`np.linalg.solve()`	Poišče vektor x za linearni sistem enačb `A.x = b`.
`np.linalg.inv()`	Izračuna inverz (obrnljive) matrike.
`np.linalg.lstsq()`	Poišče vektor x, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolj ustreza sistemu enačb `A.x = b`.

Sistemu linearnih enačb, ki je določen z matriko `A = np.array[[1, 2], [3, 4]]` in vektorjem desnih strani `b = np.array([5, 6])` lahko najdemo rešitev z uporabo funkcije `np.linalg.solve()`:

```
x = np.linalg.solve(A,b)
print(x) # izpis: [-4.   4.5]
```

Zgornji sistem lahko rešimo tudi posredno z uporabo inverzne matrike z uporabo funkcije `np.linalg.inv()`:

```
invA = np.linalg.inv(A)
print(invA) # izpis: [[-2.   1. ] [ 1.5 -0.5]]
x2 = np.dot(invA,b)
print(x2) # izpis: [-4.   4.5]
```

Pri predoločenih sistemih enačb oziroma v primerih, ko bi radi skozi izbrane točke priredili linearno funkcijo, uporabimo funkcijo `np.linalg.lstsq()`, ki najde rešitev po metodi najmanjših kvadatov. Na primer:

```
A = np.array([[1, 2], [3, 4], [5, 6]])
b = np.array([7, 8, 9])
x = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)[0] # izpis: [-6.   6.5]
print(x)
```

4.1.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Reševanje enačb. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Zapiši dani sistem enačb `x + y + z = 1, 4x + 2y = 6, x + 4y + z = 2` v obliki `A.X=b`, kjer je `A` matrika koeficientov, `X` je vektor neznank, `b` pa vektor desnih strani.
- Določi vektor neznank `X` z uporabo inverzne matrike.
- Določi vektor neznank `X` neposredno z uporabo funkcije np.linalg.solve().
- Za dani sistem enačb `x + 2y + z = −1, x + 3y + 2z = 2, 2x + 5y + 3z = 0, 2x + z = 1, 3x + y + z = −2` najdi rešitev po metodi najmanjših kvadratov.

Naloge so povzete iz Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE, Marjeta Kramar Fijavž, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, 2007/08 [http://www.kmf.fgg.uni-lj.si/Matematika/La/vaje/LA-DN-zbirka.pdf], kjer lahko najdete še več podobnih nalog.

4.1.2. Rešitve

Programska koda

```
1  import numpy as np
2
3  # matrika koeficientov
4  A = np.array([[1, 1, 1], [4, 2, 0], [1, 4, 1]])
5  print("A\n", A)
6
7  # desne strani
8  b = np.array([1, 6, 2])
9  print("b\n", b)
10
11 #inverz A
12 invA = np.linalg.inv(A)
13 print("invA\n", invA)
14
15 # rešitev z inverzom
16 X = np.dot(invA,b)
17 print("rešitev X z inverzom", X)
18
19 # rešitev neposredno
20 X = np.linalg.solve(A,b)
21 print("rešitev neposredno", X)
22
23 # matrika koeficientov
24 A1 = np.array([[1, 2, 1], [1, 3, 2], [2, 5, 3], [2, 0, 1], [3, 1, 1]])
25 print("A1\n", A1)
26
27 # desne strani
28 b1 = np.array([-1, 2, 0, 1, -2])
29 print("b1\n", b1)
30
31 # rešitev po metodi najmanjših kvadratov
32 X1 = np.linalg.lstsq(A1, b1, rcond=None)[0]
33 print("rešitev X1 po metodi najmanjših kvadratov", X1)
```

Izpis rešitev

```
A
 [[1 1 1]
 [4 2 0]
 [1 4 1]]
b
```

```
 [1 6 2]
invA
 [[ 0.16666667  0.25       -0.16666667]
 [-0.33333333  0.          0.33333333]
 [ 1.16666667 -0.25       -0.16666667]]
rešitev X z inverzom [ 1.33333333  0.33333333 -0.66666667]
rešitev neposredno [ 1.33333333  0.33333333 -0.66666667]
A1
 [[1 2 1]
 [1 3 2]
 [2 5 3]
 [2 0 1]
 [3 1 1]]
b1
 [-1  2  0  1 -2]
rešitev X1 po metodi najmanjših kvadratov [-1.53333333 -1.86666667  4.26666667]
```

4.2. Zaokroževanje

Funkcije zaokroževanja uporabljamo za zaokroževanje elementov v seznamih na določeno natančnost oziroma na določeno število decimalnih mest.

V spodnji tabeli so navedene najpogosteje uporabljene zaokrožitvene funkcije.

Funkcija	Opis
`np.round()`	Za vsak element v seznamu vrne vrednost zaokroženo na željeno natančnost (decimalno mesto).
`np.floor()`	Za vsak element v seznamu vrne najbližje celo število, ki je manjše od vrednosti elementa.
`np.ceil()`	Za vsak element v seznamu vrne najbližje celo število, ki je večje od vrednosti elementa.

S funkcijo `np.round()` lahko zaokrožimo elemente seznama na željeno natančnost. Na primer spodnja programska koda:

```
stevila = np.array([1.1111, 2.2222, 3.3333, 4.4444])
stevila_1 = np.round(stevila, 1)
print(stevila_1) # izpis: [1.1 2.2 3.3 4.4]
```

zaokroži vrednosti na 1 decimalno mesto.

S fukncijo `np.floor()` zaokrožujemo navzdol:

```
stevila_dol = np.floor(stevila)
print(stevila_dol) # izpis: [1. 2. 3. 4.]
```

ter s funkcijo `np.ceil()` zaokrožujemo navzgor:

```
stevila_gor = np.ceil(stevila)
print(stevila_gor) # izpis: [2. 3. 4. 5.]
```

4.2.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Zaokroževanje. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Pripravi seznam, ki vsebuje naslednje vrednosti 1.111, 2.222, 3.333, 4.444, 5.555, 6.666.
- Zaokroži vrednosti elementov seznama na cela števila in izpiši seznam.
- Zaokroži vrednosti elementov seznama na 2 decimalni mesti in izpiši seznam.
- Zaokroži vrednosti elementov seznama na 1 decimalno mesto in izpiši seznam.
- Zaokroži vrednosti elementov seznama navzdol in izpiši seznam.
- Zaokroži vrednosti elementov seznama navzgor in izpiši seznam.

4.2.2. Rešitve

Programska koda

```
1  import numpy as np
2
3  seznam = np.array([1.111, 2.222, 3.333, 4.444, 5.555, 6.666])
4
5
6  # zaokrožitev na cela števila
7  seznam_round = np.round(seznam)
8  print("seznam_round\n", seznam_round)
9  seznam_round0 = np.round(seznam, 0)
10 print("seznam_round0\n", seznam_round0)
11
12 # zaokrožitev na 2 decimalni mesti
13 seznam_round2 = np.round(seznam, 2)
14 print("seznam_round2\n", seznam_round2)
15
16 # zaokrožitev na 1 decimalno mesto
17 seznam_round1 = np.round(seznam, 1)
18 print("seznam_round1\n", seznam_round1)
19
20 # zaokrožitev navzdol
21 seznam_floor = np.floor(seznam)
22 print("seznam_floor\n", seznam_floor)
23
24 # zaokrožitev navzgor
25 seznam_ceil = np.ceil(seznam)
26 print("seznam_ceil\n", seznam_ceil)
```

Izpis rešitev

```
original 1D
 [1 2 3 4]
transponiran 1D
 [1 2 3 4]
original 2D
 [[1 2]
 [3 4]]
transponiran 2D
 [[1 3]
 [2 4]]
original 3D
 [[[1 2]
  [3 4]]

 [[5 6]
  [7 8]]]
transponiran 3D
 [[[1 3]
  [5 7]]

 [[2 4]
  [6 8]]]
```

4.3. Statistika

V spodnji tabeli je navedenih nekaj najpomembnejših statističnih funkcij, ki jih lahko uporabimo pri delu s seznami.

Funkcije	Opis
`np.median()`	Določi mediano (srednjo vrednost) seznama.
`np.mean()`	Izračuna povprečno vrednost seznama.
`np.std()`	Izračuna standarni odklon (standardna deviacija) seznama.
`np.percentile()`	Izračuna željeni percentil seznama.
`np.min()`	Določi najmanjšo vrednost v seznamu.
`np.max()`	Določi največjo vrednost v seznamu.

Z uporabo knjižnice *numpy* lahko za dani seznam vrednosti:

```
seznam = np.array([0, 0, 1, 1, 3, 5, 6, 8, 9, 9, 3])
```

določimo mediano oz. srednjo vrednost:

```
srednja_vrednost = np.median(seznam)
```

```
print(srednja_vrednost) # izpis: 4.0
```

povprečje:

```
povprecje = np.mean(seznam)
print(povprecje) # izpis: 4.2
```

standardni odklon:

```
std_odklon = np.std(seznam)
print(std_odklon) # izpis: 3.4871191548325386
```

poljuben percentil, npr. v spodnjem primeru 60-it percentil:

```
percentil_60 = np.percentile(seznam, 60)
print(percentil_60) # izpis: 5.3999999999999995
```

najmanjšo vrednost:

```
minimum = np.min(seznam)
print(minimum) # izpis: 0
```

ter največjo vrednost:

```
maksimum = np.max(seznam)
print(maksimum) # izpis: 9
```

Podobno lahko storimo tudi v primeru seznamov višjih dimenzij, kjer imamo še dodatno možnost, da iščemo statistične karkateristike za celoten seznam ali pa za posamezne osi (v primeru 2D seznamov za posamezne stolpce in vrstice). Naslednjemu seznamu:

```
seznam_2D = np.array([[0, 1, 1, 3, 5], [6, 8, 9, 9, 3]])
```

lahko določimo npr. standardni odklon z upoštevanjem vseh elementov:

```
std_odklon = np.std(seznam_2D)
print(std_odklon) # izpis: 3.4871191548325386
```

Z vrednostjo parameta `axis=0` povemo, da želimo izračun standardnega odklona v smeri vrstic, kar pomeni, da se izračunajo vrednosti standardnih odklonov za vsak stolpec posebej:

```
std_odklon_0 = np.std(seznam_2D, axis=0)
```

```
print(std_odklon_0) # izpis: [3.  3.5 4.  3.  1. ]
```

Podobno določimo z vrednostjo parametra `axis=1` standardne odklone za vsako vrstico posebej:

```
std_odklon_1 = np.std(seznam_2D, axis=1)
print(std_odklon_1) # izpis: [1.78885438 2.28035085]
```

Pri 2D seznamih lahko določimo tudi v kateri smeri naj se izvrši izračun statističnih karkateristik seznama, in sicer:

- `axis = 0` pomeni, da se izračun izvede v smeri navpične osi ter
- `axis = 1` pomeni, da se izračun izvede v smeri vodoravne osi.

V kolikor parametra `axis` ne navedemo, se bo izračun izvedel za celoten seznam.

4.3.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Statistika. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Pripravi seznam 50-ih naključnih vrednosti porazdeljenih z normalno porazdelitvijo, ki ima srednjo vrednost 50 in standardni odklon 10.
- Izračunaj in izpiši srednjo vrednost seznama.
- Izračunaj in izpiši standardni odklon seznama.
- Izračunaj in izpiši mediano seznama.
- Izračunaj in izpiši mediano seznama, ki jo določiš z uporabo funkcije ` np.percentile()`.
- Izračunaj in izpiši 25. percentil seznama.
- Določi in izpiši najmanjši element seznama.
- Določi in izpiši največji element seznama.
- Pripravi seznam, ki je oblike [[1.1, 1.2, 1.3], [3.1, 3.2, 3.3], [7.1, 7.2, 7.3]].
- Izračunaj in izpiši srednje vrednosti po stolpcih.
- Izračunaj in izpiši srednje vrednosti po vrsticah.
- Izračunaj in izpiši srednjo vrednost celotnega seznama.
- Določi najmanjši element po stolpcih.
- Določi najmanjši element po vrsticah.
- Določi najmanjši element celotnega seznama.

4.3.2. Rešitve

Programska koda

```
1 import numpy as np
2
3 # zgeneriramo seznam naključnih vrednosti porazdeljenih z normalno porazdelitvijo
4 srednja_vrednost = 50
```

```
standarni_odklon = 10
seznam = standarni_odklon * np.random.randn(50) + srednja_vrednost
print("seznam\n", seznam)

# izračun srednje vrednosti
seznam_mean = np.mean(seznam)
print("seznam_mean\n", seznam_mean)

# izračun standardnega odklona
seznam_std = np.std(seznam)
print("seznam_std\n", seznam_std)

# izračun mediane
seznam_median = np.median(seznam)
print("seznam_median\n", seznam_median)

# izračun mediane s funcijo percentile()
seznam_median2 = np.percentile(seznam, 50)
print("seznam_median2\n", seznam_median2)

# izračun 25. percentila
seznam_percentile25 = np.percentile(seznam,25)
print("seznam_percentile25\n", seznam_percentile25)

# najmanjši element
seznam_min = np.min(seznam)
print("seznam_min\n", seznam_min)

# največji element
seznam_max = np.max(seznam)
print("seznam_max\n", seznam_max)

# 2d seznam
seznam_2D = np.array([[1.1, 1.2, 1.3],
                      [3.1, 3.2, 3.3],
                      [7.1, 7.2, 7.3]])

# izračun srednje vrednosti po stolpcih
seznam_2D_mean0 = np.mean(seznam_2D, axis=0)
print("seznam_2D_mean0\n", seznam_2D_mean0)

# izračun srednje vrednosti po vrsticah
seznam_2D_mean1 = np.mean(seznam_2D, axis=1)
print("seznam_2D_mean1\n", seznam_2D_mean1)

# izračun srednje vrednosti celotnega seznama
seznam_2D_mean = np.mean(seznam_2D)
print("seznam_2D_mean\n", seznam_2D_mean)

```

```
54 # najmanjši element po stolpcih
55 seznam_2D_min0 = np.min(seznam_2D, axis=0)
56 print("seznam_2D_min0\n", seznam_2D_min0)
57
58 # najmanjši element po vrsticah
59 seznam_2D_min1 = np.min(seznam_2D, axis=1)
60 print("seznam_2D_min1\n", seznam_2D_min1)
61
62 # najmanjši element celotnega seznama
63 seznam_2D_min = np.min(seznam_2D)
64 print("seznam_2D_min\n", seznam_2D_min)
```

Izpis rešitev

```
seznam
 [59.2800862  49.30684234 41.62470762 56.97682666 53.13979494 58.85456065
 64.2747638  44.59592954 49.29705586 53.33265949 66.3533084  54.83978799
 53.5509975  38.75255501 49.52273936 71.54802576 33.82713275 50.01982414
 56.5588116  72.74523797 53.15754208 48.85619429 74.12762058 49.07758449
 49.42776782 55.13289532 50.68007113 48.88408253 45.81108793 54.40892332
 51.36377012 34.44399323 57.15889533 52.44000641 63.45206393 57.68874462
 41.32500471 51.10733731 54.4328317  55.60553245 37.29038252 33.03698385
 40.31407382 50.34881937 60.12421208 41.25793222 46.47404492 36.86199348
 52.66445084 42.46406997]
seznam_mean
 51.35641119920799
seznam_std
 9.446792237383098
seznam_median
 51.23555371494673
seznam_median2
 51.23555371494673
seznam_percentile25
 45.97682717788532
seznam_min
 33.036983849492955
seznam_max
 74.12762057542108
seznam_2D_mean0
 [3.76666667 3.86666667 3.96666667]
seznam_2D_mean1
 [1.2 3.2 7.2]
seznam_2D_mean
 3.8666666666666663
seznam_2D_min0
 [1.1 1.2 1.3]
seznam_2D_min1
 [1.1 3.1 7.1]
seznam_2D_min
```

```
1.1
```

4.4. Primerjalni in logični operatorji

Podobno kot v programskem jeziku Python lahko tudi v knjižnici *numpy* uporabljamo primerjalne in logične operatorje. Edina razlika je v tem, da ponavadi v Python-u primerjamo dve vrednosti medtem ko v *numpy* primerjamo po dva elementa iz različnih seznamov.

4.4.1. Primerjalni operatorji

S primerjalnimi operatorji primerjamo vrednosti elementov dveh seznamov, kjer je rezultat primerjave nov seznam z logičnimi vrednostmi (`True` ali `False`), ki je enakih dimenzij kot seznama, ki ju primerjamo.

V spodnji tabeli so navedeni primerjalni operatorji oziroma primerjalne funkcije v knjižnici *numpy*.

Funkcija	Operator	Opis
`np.less()`	`<` (manjši)	Po elementih vrne `True`, če je element iz prvega seznama manjši od elementa v drugem seznamu.
`np.less_equal()`	`< =` (manjši ali enak)	Po elementih vrne `True`, če je element iz prvega seznama manjši ali enak elementu v drugem seznamu.
`np.greater()`	`>` (večji)	Po elementih vrne `True`, če je element iz prvega seznama večji od elementa v drugem seznamu.
`np.greater_equal()`	`>=` (večji ali enak)	Po elementih vrne `True`, če je element iz prvega seznama večji ali enak elementu v drugem seznamu.
`np.equal()`	`==` (enak)	Po elementih vrne `True`, če je element iz prvega seznama enak elementu v drugem seznamu.
`np.not_equal()`	`!=` (ni enak)	Po elementih vrne `True`, če element iz prvega seznama ni enak elementu v drugem seznamu.

S primerjalnimi operatorji oziroma primerjalnimi funkcijami lahko primerjamo vrednosti dveh različnih seznamov, kjer pa moramo paziti, da sta oba seznama enakih dimenzij. Če želimo preveriti, kateri elementi v seznamu :

```
seznam_1 = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
```

so večji ali enaki od elementov v seznamu:

```
seznam_2 = np.array([5, 4, 3, 2, 1])
```

lahko to naredimo ali z uporabo operatorja `>=`:

```
rezultat_operator = seznam_1 >= seznam_2
```

```
print(rezultat_operator) # izpis: [False False  True  True  True]
```

ali pa z uporabo funkcije `np.greater_equal()`:

```
rezultat_funkcija = np.greater_equal(seznam_1, seznam_2)
print(rezultat_funkcija) # izpis: [False False  True  True  True]
```

V obeh primerih vidimo, da so 3., 4. in 5. element v seznamu `seznam_1` večji od elementov v `seznam_2`.

Na enak način lahko primerjamo tudi vrednosti med elementi v seznamu in skalarjem:

```
rezultat_skalar_operator = seznam_1 == 2
print(rezultat_skalar_operator) # izpis: [False True False False False]
```

kjer smo preverili, kateri elementi v `seznamu_1` imajo vrednost `2`.

Obnašanje je povsem enako, če uporabimo funkcijo `np.equal()`:

```
rezultat_skalar_funkcija = np.equal(seznam_1, 2)
print(rezultat_skalar_funkcija) # izpis: [False True False False False]
```

4.4.2. Logične operacije

Logične operacije se izvajajo po elementih, kjer se združuje logične izraze iz dveh seznamov. Rezultat logične operacije je nov seznam z logičnimi vrednostmi, ki je enakih dimenzij kot vhodna seznama.

V spodnji tabeli so navedene logične operacije v knjižnici *numpy*.

Funkcija	Opis
`np.logical_and()`	Po elementih določi vrednost logične **in** (`AND`) operacije.
`np.logical_or()`	Po elementih določi vrednost logične **ali** (`OR`) operacije.
`np.logical_not()`	Po elementih **negira** (`NOT`) logične izraze v seznamu .

Za dana seznama:

```
seznam_1 = np.array([False, True, False, True])
seznam_2 = np.array([False, False, True, True])
```

s funkcijo `np.logical_and()` izvrednostimo logično **in** (`AND`) operacijo po elementih:

```
rezultat_and = np.logical_and(seznam_1, seznam_2)
print(rezultat_and) # Izraz: [False False False  True]
```

kjer se vrednost `True` v seznamu `rezultat_and` pojavi le na mestu, kjer imata oba elementa v seznamih `seznam_1`

in `seznam_2` vrednost `True`.

Podobno lahko s funkcijo `np.logical_or()` izvrednotimo logično **ali** (`OR`) operacijo po elementih:

```
rezultat_or = np.logical_or(seznam_1, seznam_2)
print(rezultat_or) # Izraz: [False  True  True  True]
```

kjer se vrednost `True` v seznamu `rezultat_or` pojavi na mestih, kjer ima vsaj eden od elementov v seznamih `seznam_1` in `seznam_2` vrednost `True`.

Logične operacije s funkcijama `np.logical_and()` in `np.logical_or()` lahko izvedemo tudi v kombinaciji seznama in posamezne logične vrednosti. Na primer:

```
rezultat_and_skalar = np.logical_and(seznam_1, True)
print(rezultat_and_skalar) # Izraz: [False  True False  True]
```

Zadnja logična operacija je **negacija** (`NOT`) s funkcijo `np.logical_not()`:

```
rezultat_not = np.logical_not(seznam_1)
print(rezultat_not) # Izraz: [ True False  True False]
```

kjer vidimo, da ima razultat ravno obratne vrednosti kot vhodni seznam.

4.4.3. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Primerjalni in logični operatorji. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Definiraj seznam `seznam_1`, ki vsebuje števila od 1 do 50.
- Definiraj seznam `seznam_1`, ki vsebuje števila od 76 do 25.
- Določi in izpiši seznam `rezultat_1`, ki preveri, ali so elementi v `seznam_1` večji od elementov v `seznam_2`.
- Določi in izpiši seznam `rezultat_2`, ki preveri, ali so elementi v `seznam_1` večji ali enaki elementom v `seznam_2`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali so elementi v `seznam_1` manjši od elementov v `seznam_2`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali so elementi v `seznam_1` manjši ali enaki elementom v `seznam_2`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali so elementi v `seznam_1` enaki elementom v `seznam_2`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali elementi v `seznam_1` niso enaki elementom v `seznam_2`.
- Izpiši seznam, ki po elementih določi logično **in** (`AND`) operacijo za seznama `rezultat_1` in `rezultat_2`.
- Izpiši seznam, ki po elementih določi logično **ali** (`OR`) operacijo za seznama `rezultat_1` in `rezultat_2`.
- Izpiši seznam, ki **negira** (`NOT`) elemente seznama `rezultat_1`.
- Definiraj seznam `seznam_3`, ki je oblike [[1, 2, ..., 10], [11, 12, ..., 20], [21, 22, ..., 30], [31, 32, ..., 40], [41, 42, ..., 50]].
- Definiraj seznam `seznam_4`, ki je oblike [[76, 75, ..., 67], [66, 65, ..., 57], [56, 55, ..., 47], [46, 45, ..., 37], [36, 35, ..., 27]].

- Določi in izpiši seznam `rezultat_3`, ki preveri, ali so elementi v `seznam_3` večji od elementov v `seznam_4`.
- Določi in izpiši seznam `rezultat_4`, ki preveri, ali so elementi v `seznam_3` večji ali enaki elementom v `seznam_4`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali so elementi v `seznam_3` manjši od elementov v `seznam_4`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali so elementi v `seznam_3` manjši ali enaki elementom v `seznam_4`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali so elementi v `seznam_3` enaki elementom v `seznam_4`.
- Izpiši seznam, ki preveri, ali elementi v `seznam_3` niso enaki elementom v `seznam_4`.
- Izpiši seznam, ki po elementih določi logično **in** (`AND`) operacijo za seznama `rezultat_3` in `rezultat_4`.
- Izpiši seznam, ki po elementih določi logično **ali** (`OR`) operacijo za seznama `rezultat_3` in `rezultat_4`.
- Izpiši seznam, ki **negira** (`NOT`) elemente seznama `rezultat_3`.

4.4.4. Rešitve

Programska koda

```
import numpy as np

# definicija seznamov
seznam_1 =  np.arange(1,51)
seznam_2 = np.arange(76,26,-1)

# seznam_1 > seznam_2
rezultat_1 = np.greater(seznam_1, seznam_2)
print("seznam_1 > seznam_2\n", rezultat_1)

# seznam_1 >= seznam_2
rezultat_2 = np.greater_equal(seznam_1, seznam_2)
print("seznam_1 >= seznam_2\n", rezultat_2)

# seznam_1 < seznam_2
print("seznam_1 < seznam_2\n", np.less(seznam_1, seznam_2))

# seznam_1 <= seznam_2
print("seznam_1 <= seznam_2\n", np.less_equal(seznam_1, seznam_2))

# seznam_1 == seznam_2
print("seznam_1 == seznam_2\n", np.equal(seznam_1, seznam_2))

# seznam_1 != seznam_2
print("seznam_1 != seznam_2\n", np.not_equal(seznam_1, seznam_2))

# rezultat_1 AND rezultat_2
print("rezultat_1 AND rezultat_2\n", np.logical_and(rezultat_1, rezultat_2))

# rezultat_1 OR rezultat_2
print("rezultat_1 OR rezultat_2\n", np.logical_or(rezultat_1, rezultat_2))

```

```
# NOT rezultat_1
print("rezultat_1 OR rezultat_2\n", np.logical_not(rezultat_1))

# definicija seznamov
seznam_3 = np.array([np.arange(1,11),np.arange(11,21),np.arange(21,31),np.arange(
31,41),np.arange(41,51)])
seznam_4 = np.array([np.arange(76,66,-1),np.arange(66,56,-1),np.arange(56,46,-1),
np.arange(46,36,-1),np.arange(36,26,-1)])

# seznam_3 > seznam_4
rezultat_3 = seznam_3 > seznam_4
print("seznam_3 > seznam_4\n", seznam_3 > seznam_4)

# seznam_3 >= seznam_4
rezultat_4 = seznam_3 >= seznam_4
print("seznam_3 >= seznam_4\n", seznam_3 >= seznam_4)

# seznam_3 < seznam_4
print("seznam_3 < seznam_4\n", seznam_3 < seznam_4)

# seznam_3 <= seznam_4
print("seznam_3 <= seznam_4\n", seznam_3 <= seznam_4)

# seznam_3 == seznam_4
print("seznam_3 == seznam_4\n", seznam_3 == seznam_4)

# seznam_3 != seznam_4
print("seznam_3 != seznam_4\n", seznam_3 != seznam_4)

# rezultat_3 AND rezultat_4
print("rezultat_3 AND rezultat_4\n", np.logical_and(rezultat_3, rezultat_4))

# rezultat_3 OR rezultat_4
print("rezultat_3 OR rezultat_4\n", np.logical_or(rezultat_3, rezultat_4))

# NOT rezultat_3
print("rezultat_3 OR rezultat_4\n", np.logical_not(rezultat_3))
```

Izpis rešitev

```
seznam_1 > seznam_2
 [False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False
 False False  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True]
seznam_1 >= seznam_2
 [False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False
```

```
 False False False False False False False False False False False False
 False False  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True]
seznam_1 < seznam_2
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True False False False False False False False False False False
 False False]
seznam_1 <= seznam_2
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True False False False False False False False False False False
 False False]
seznam_1 == seznam_2
 [False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False]
seznam_1 != seznam_2
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True]
rezultat_1 AND rezultat_2
 [False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True]
rezultat_1 OR rezultat_2
 [False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False False False False False False False False False False False
 False False  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True]
rezultat_1 OR rezultat_2
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True  True
  True  True False False False False False False False False False False
 False False]
seznam_3 > seznam_4
 [[False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
```

```
 [False False False False False False False False  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]]
seznam_3 >= seznam_4
 [[False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]]
seznam_3 < seznam_4
 [[ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True False False]
 [False False False False False False False False False False]]
seznam_3 <= seznam_4
 [[ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True False False]
 [False False False False False False False False False False]]
seznam_3 == seznam_4
 [[False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]]
seznam_3 != seznam_4
 [[ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]]
rezultat_3 AND rezultat_4
 [[False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]]
rezultat_3 OR rezultat_4
 [[False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False False False]
 [False False False False False False False False  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]]
rezultat_3 OR rezultat_4
 [[ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True  True  True]
 [ True  True  True  True  True  True  True  True False False]
```

```
 [False False False False False False False False False False]]
```

4.5. Logično indeksiranje

Poleg indeksiranja, ki je bilo predstavljeno v razdelku Indeksiranje numpy seznamov, knjižnica *numpy* omogoča tudi tako imenovano logično indeksiranje.

Poglejmo si, kako deluje logično indeksiranje na seznamu:

```
seznam = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])
```

Recimo, da bi radi iz seznama pobrali le tiste vrednosti, ki so večje od 5. Kot smo pogledali v razdelku Primerjalni in logični operatorji, lahko dobimo sezname z logičnimi vrednostmi `True`/`False` z naslednjo programsko kodo:

```
logicni_indeksi = seznam > 5
print(logicni_indeksi) # izpis: [False False False False False  True  True  True]
```

Sedaj pa lahko seznam `logicni_indeksi` uporabimo, da z logičnim indeksiranjem iz seznama `seznam` dobimo željene vrednosti:

```
izbrane_vrednosti = seznam[logicni_indeksi]
print(izbrane_vrednosti) # izpis: [6 7 8]
```

Seveda bi lahko to storili tudi neposredno brez uporabe vmesne spremenljivke:

```
izbrane_vrednosti_neposredno = seznam[seznam > 5]
print(izbrane_vrednosti_neposredno) # izpis: [6 7 8]
```

Logično indeksiranje se lahko uporabi tudi za urejanje seznama:

```
seznam[logicni_indeksi] = 15
print(seznam) # izpis: [1 2 3 4 5 15 15 15]
```

V zgornji kodi smo namreč vsem elementom, ki so večji od 5, priredili novo vrednost 15.

Logično indeksiranje deluje tudi v primeru dvo in več dimenzionalnih seznamov.

Sintaksa za določitev logičnih indeksov pri več dimenzionalnih seznamih, npr.:

```
seznam_2d =  np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
```

je povsem identična, kot pri 1D seznamih:

```
logicni_indeksi_2d = seznam_2d > 5
```

```
print(logicni_indeksi_2d) # izpis: [[False False False False] [False  True  True
True] [ True  True  True  True]]
```

Do razlike pa pride pri rezultatih logičnega indeksiranja. Vsi rezultati, ne glede na dimenzijo vhodnega seznama, so vedno enodimenzionalni.

Tako je tudi v primeru logičnega indeksiranja seznama `seznam_2d`:

```
izbrane_vrednosti_2d = seznam_2d[logicni_indeksi_2d]
print(izbrane_vrednosti_2d) # izpis: [6 7 8 9 10 11 12]
```

kjer se določi seznam `izbrane_vrednosti_2d`, ki je enodimenzionalen.

4.5.1. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Logično indeksiranje. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Določi seznam `seznam`, ki vsebuje vrednosti od -10 do 9.
- Določi seznam `lihi_indeksi`, ki je enako velik kot `seznam` in vsebuje `True` logično vrednost na elementih z lihim indeksom.
- Iz seznama `seznam` izpiši le elemente, ki so na lihih indeksih.
- Določi seznam `sodi_indeksi`, ki je enako velik kot `seznam` in vsebuje `True` logično vrednost na elementih s sodim indeksom.
- Iz seznama `seznam` izpiši le elemente, ki so na sodih indeksih.
- V seznamu `seznam` elementom na lihih indeksih popravi vrednost, in sicer v njihove kvadrate.
- Izpiši popravljen seznam `seznam`.

4.5.2. Rešitve

Programska koda

```
1  import numpy as np
2
3  # definicija seznama
4  seznam = np.arange(-10,10)
5
6  # lihi indeksi
7  lihi_indeksi = np.arange(0,len(seznam)) % 2 == 1
8  print("lihi_indeksi\n", lihi_indeksi)
9  print("vrednosti na lihih indeksih\n", seznam[lihi_indeksi])
10
11 #sodi indeksi
12 sodi_indeksi = np.arange(0,len(seznam)) % 2 == 0
13 print("sodi_indeksi\n", sodi_indeksi)
14 print("vrednosti na sodih indeksih\n", seznam[sodi_indeksi])
15
```

```
16 # kvadriranje elementov na lihih indeksih
17 seznam[lihi_indeksi] = seznam[lihi_indeksi] ** 2
18
19 # popravljen seznam
20 print("popravljen seznam\n", seznam)
```

Izpis rešitev

```
lihi_indeksi
 [False  True False  True False  True False  True False  True False  True
 False  True False  True False  True False  True]
vrednosti na lihih indeksih
 [-9 -7 -5 -3 -1  1  3  5  7  9]
sodi_indeksi
 [ True False  True False  True False  True False  True False  True False
  True False  True False  True False  True False]
vrednosti na sodih indeksih
 [-10  -8  -6  -4  -2   0   2   4   6   8]
popravljen seznam
 [-10  81  -8  49  -6  25  -4   9  -2   1   0   1   2   9   4  25   6  49
   8  81]
```

4.6. Vektorizacija

Vektorizacija s knjižnico *numpy* omogoča izvedbo matematičnih operacij na celotnem seznamu. Iteriranje po seznamu oziroma uporaba zank je zato odveč.

4.6.1. Primerjava s Python-om

Do sedaj smo se že večkrat srečali z vektorizacijo. Na primer že preposto seštevanje s knjižnico *numpy* vključuje vektorizacijo:

```
import numpy as np
seznam = np.array([0, 1, 2, 3])
resultat = seznam + 3
print(resultat) # izpis: [3 4 5 6]
```

kjer se je prištevanje števila 3 izvedlo za vsak element posebej, brez uporabe zanke po elementih.

Poglejmo si, kako bi podoben izračun izgledal v čistem Python-u:

```
seznam_py = [0, 1, 2, 3]
rezultat_py = []
for element in seznam_py:
    rezultat_py.append(element + 3)
print(rezultat_py) # izpis: [3, 4, 5, 6]
```

V zgornjem primeru vidimo, da je poleg same operacije seštevanja, ki se izvaja za vsak element posebej, potrebno izvesti tudi zanko po vseh elementih. V zgornjem primeru smo za ta namen uporabili zanko `for`.

Omeniti je potrebno, da je pri manjših primerih hitrost čistega Python-a primerljiva s knjižnico *numpy*. Prednost knjižnice *numpy* se pokaže v primerih, ko imamo opravka z velikimi seznami, ki vsebujejo nekaj tisoč in več elementov.

4.6.2. funkcija np.vectorize()

Praktično vse matematične operacije, ki so navedene v tej knjigi, so avtomatsko vektorizirane in dodatno delo s strani uporabnika ni potrebno.

Včasih pa se soočimo s situacijo, ko so potrebni dodatni koraki, da se lahko izvrednotijo vrednosti za vsak element posebej.

Poglejmo si primer, ko bi radi pozitivnim številom v seznamu:

```
seznam = np.array([-5, -3, -1, 1, 3, 5])
```

določili kvadratni koren, za vsa ostala števila pa bi radi vrnili vrednost -1, saj korenjenje ni mogoče (če ne vključimo kompleksnih števil).

Za ta primer lahko definiramo funkcijo:

```
def kvadratni_koren(x):
    if x < 0:
        return -1
    else:
        return np.sqrt(x)
```

Če bi radi določili vrednosti gornje funkcije za vsak element posebej, imamo dve možnosti.

Možnost brez uporabe vektorizacije je, da uporabimo zanko `for`:

```
rezultat = []
for element in seznam:
    rezultat.append(kvadratni_koren(element))
print(rezultat) # izpis: [-1, -1, -1, 1.0488088481701516, 1.7888543819998317, 3.0]
```

Druga, v večini primerov hitrejša, možnost pa je uporaba funkcije `np.vectorize()`:

```
kvadratni_koren_vektoriziran = np.vectorize(kvadratni_koren, otypes=[float])
rezultat = kvadratni_koren_vektoriziran(seznam)
print(rezultat) # izpis: [-1. -1. -1. 1.04880885 1.78885438 3.]
```

s pomočjo katere smo definirali novo funkcijo `kvadratni_koren_vektoriziran`, ki je vektoriziranega tipa in omogoča izvednotenje za vsak element posebej.

Pri zgornji uporabi funkcije `np.vectorize()` smo uporabili parameter `otypes=[float]`, s

katerim smo določili, da so rezultati funkcije `kvadratni_koren_vektoriziran` tipa `float`. Brez uporabe parametra se številski podatkovni tip avtomatsko določi in ni nujno, da so rezultati takega podatkovnega tipa, kot ga pričakujemo.

Zgornji problem bi lahko izračunali tudi brez uporabe `np.vectorize()` funkcije z uporabo spodnje programske kode:

```
rezultat_2 = seznam.copy()
rezultat_2[seznam < 0] = -1
rezultat_2[seznam >= 0] = np.sqrt(seznam[seznam>=0])
print(rezultat_2) # izpis: [-1. -1. -1. 1.04880885 1.78885438 3.]
```

kjer smo si pomagali z logičnim indeksiranjem predstavljenim v razdelku Logično indeksiranje.

4.6.3. Naloge

Spodaj so navedene naloge, s katerimi utrjujemo funkcionalnosti predstavljene v razdelku Vektorizacija. Rešitve nalog najdete v razdelku Rešitve.

- Določi seznam točk `X`, ki med vrednostima -10 in 10 vsebuje 30 ekvidistantnih točk.
- Definiraj funkcijo `f_x(x)`, ki za negativni `x` vrne vrednost `-x`, za pozitivni `x` pa `x^2`.
- Vektoriziraj funkcijo `f_x` in jo shrani kot `f_X`.
- Izvrednoti `f_X(X)` in rezultat shrani v seznam `Y_1`.
- Za vse vrednosti v seznamu `X` brez vektorizacije izvedi enako matematično operacijo, kot jo naredi `f_x(x)` in rezultat shrani v `Y_2`.
- Nariši grafa obeh rešitev.

4.6.4. Rešitve

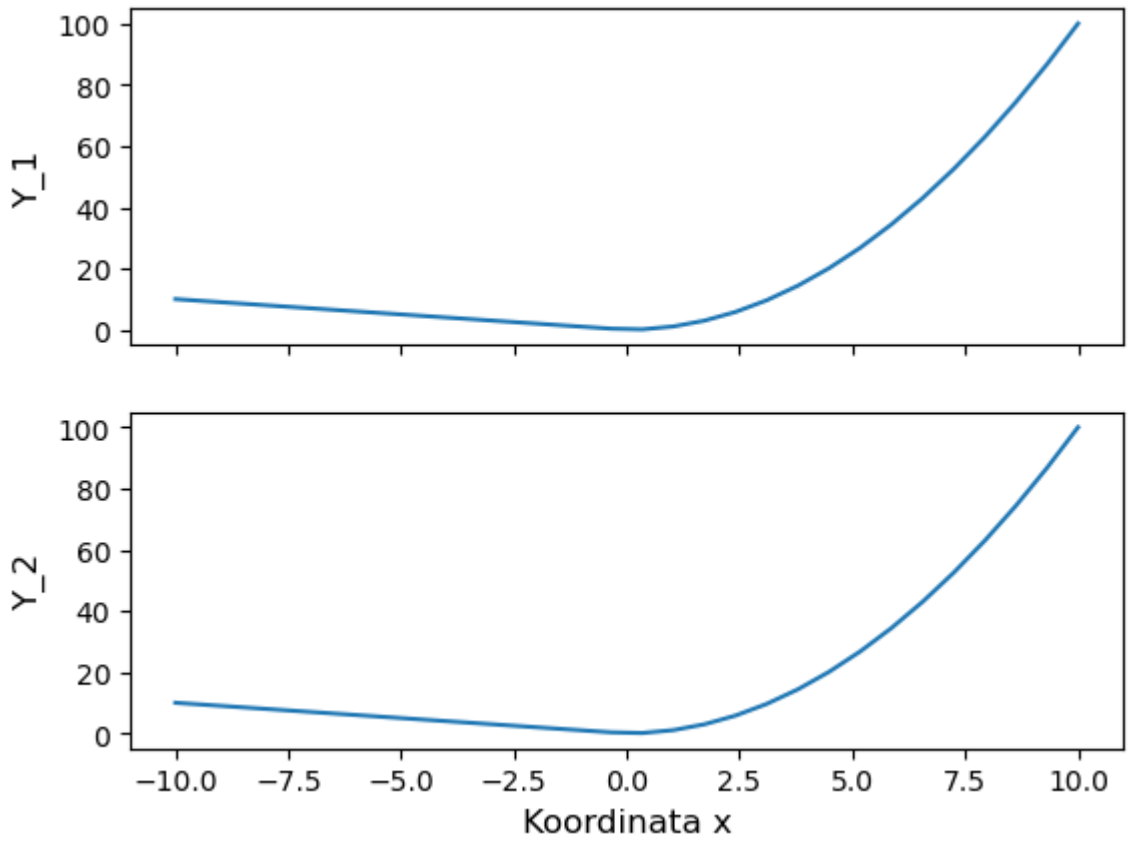
Programska koda

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # seznam x-ov
5  X = np.linspace(-10,10,30)
6
7  # definicija funkcije
8  def f_x(x):
9      if x < 0:
10         return -x
11     else:
12         return x ** 2
13
14 # vektorizacija funkcije
15 f_X = np.vectorize(f_x, otypes=[float])
```

```
16
17 Y_1 = f_X(X)
18 print("Y_1\n", Y_1)
19
20 # izračun z logičnimi indeksi
21 Y_2 = X ** 2
22 Y_2[X<0] = -X[X<0]
23 print("Y_2\n", Y_2)
24
25 # risanje grafov s knjižnico matplotlib
26 fig, axs = plt.subplots(2, 1, sharex=True)
27 axs[0].plot(X, Y_1)
28 axs[0].set_ylabel('Y_1', fontsize=12)
29 axs[1].plot(X, Y_2)
30 axs[1].set_ylabel('Y_2', fontsize=12)
31 axs[1].set_xlabel('Koordinata x', fontsize=12)
32
33 plt.show()
```

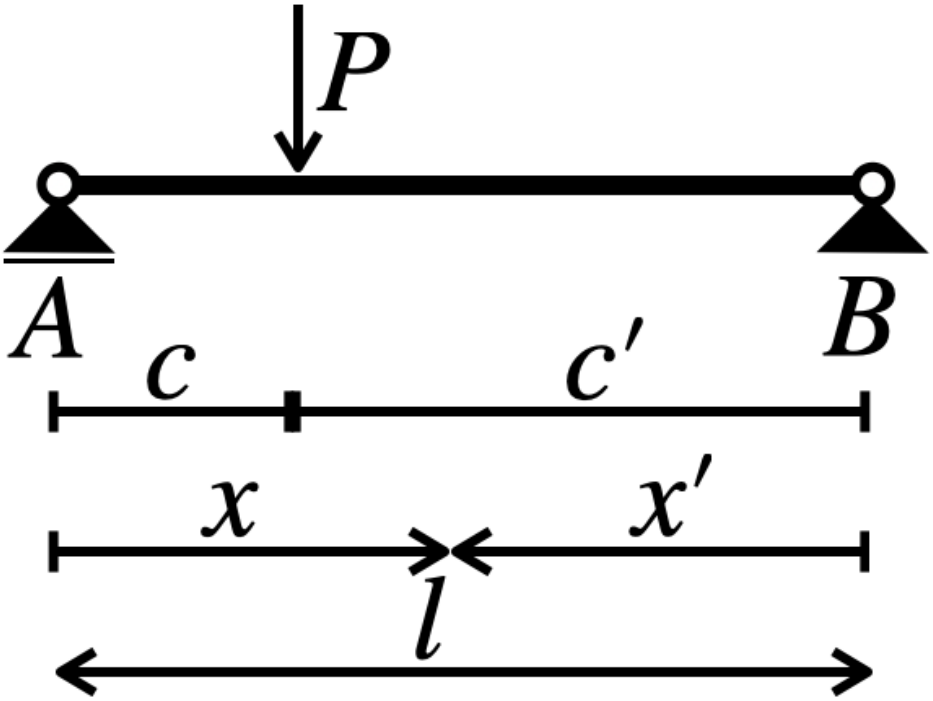
Izpis rešitev

```
Y_1
 [ 10.          9.31034483   8.62068966   7.93103448   7.24137931
   6.55172414   5.86206897   5.17241379   4.48275862   3.79310345
   3.10344828   2.4137931    1.72413793   1.03448276   0.34482759
   0.11890606   1.07015458   2.97265161   5.82639715   9.6313912
  14.38763377  20.09512485  26.75386445  34.36385256  42.92508918
  52.43757432  62.90130797  74.31629013  86.68252081 100.        ]
Y_2
 [ 10.          9.31034483   8.62068966   7.93103448   7.24137931
   6.55172414   5.86206897   5.17241379   4.48275862   3.79310345
   3.10344828   2.4137931    1.72413793   1.03448276   0.34482759
   0.11890606   1.07015458   2.97265161   5.82639715   9.6313912
  14.38763377  20.09512485  26.75386445  34.36385256  42.92508918
  52.43757432  62.90130797  74.31629013  86.68252081 100.        ]
```


Y_1
100
80
60
40
20
0
Y_2
100
80
60
40
20
0
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
Koordinata x

Poglavje 5. Inženirski primeri

5.1. Naloga nosilec



Reakcije:

$$A = \frac{Pc'}{l}$$

$$B = \frac{Pc}{l}$$

Moment:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{Pc'}{l}x \text{ za } 0 \leq x \leq c \\ \frac{Pc}{l}x' \text{ za } c \leq x' \leq l \end{cases}$$

Pomiki:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{Pl^3}{6EI}\left(\frac{c'x}{l^2} - \frac{c'^3x}{l^4} - \frac{c'x^3}{l^4}\right) \text{ za } 0 \leq x \leq c \\ \frac{Pl^3}{6EI}\left(\frac{cx'}{l^2} - \frac{c^3x'}{l^4} - \frac{cx'^3}{l^4}\right) \text{ za } 0 \leq x \leq c \end{cases}$$

Slika 1. Prostoležeč nosilec s silo

S pomočjo knjižnice *numpy* je potrebno v skladu s spodnjimi navodili pripraviti kodo, ki izračuna notranje količine za nosilec na sliki Prostoležeč nosilec s silo. Rešitev najdete v razdelku Rešitev.

- Definiraj spremenljivke, v katere se shranijo podatki o nosilcu (dolžina nosilca, elastični modul, vztrajnostni moment, pozicija obtežbe, velikost obtežbe in število notranjih točk za izvrednotenje notranjih količin) in jih izpiši.

- Določi seznam `X` v katerega shraniš pozicije notranjih točk vzdolž nosilca za izračun notranjih količin.
- Izračunaj reakciji `A` in `B`.
- Definiraj funkcijo za izračun upogibnega momenta `m_x(x)`.
- Definiraj funkcijo za izračun vertikalnega pomika `w_x(x)`.
- Vektoriziraj funkcijo `m_x(x)` in jo shrani v `M_x`.
- Vektoriziraj funkcijo `w_x(x)` in jo shrani v `W_x`.
- Izvrednoti momente vzdolž nosilca in vrednosti shrani v spremenljivko `momenti`.
- Izvrednoti vertikalne pomike vzdolž nosilca in vrednosti shrani v spremenljivko `pomiki`.
- Za vsako točko vzdolž nosilca izpiši pozicijo, vrednost momenta in vrednost pomika.
- Določi največje in najmanjše vrednosti upogibnega momenta in vertikalnega pomika.
- nariši graf upogibnega momenta vzdolž nosilca, kjer upoštevaš, da so pozitivni momenti rišejo na natezno stran nosilca.
- Nariši graf prečnega pomika vzdolž nosilca, kjer upoštevaš, da so pozitivni pomiki v smeri navzdol in jih tako tudi nariši.

5.1.1. Rešitev

Programska koda

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

print("PODATKI O NOSILCU")
# dolžina nosilca
l = 10.
print("Dolžina nosilca:", l)

# elastični modul
E = 3000.
print("Elastični modul:", E)

# Vztrajnostni moment
I = 1000.
print("Vztrajnostni moment:", I)

# pozicija obtežbe
c = 3.
c_ = l - c
print("Pozicija obtežbe:", c)

# velikost obtežbe
P = 13.
print("Obtežba P:", P)

print("\nPODATKI ZA IZRAČUN NOSILCU")
# izbrano število točk za izračun notranih sil in pomikov
st_tock = 31
```

```
print("Število točka za ozračun:", st_tock)

# pozicije točk za izračun
X = np.linspace(0,l,st_tock)
print("Pozicije točk vzdolž nosilca:\n", X)

print("\nREZULTATI")

# izračun reakcij
A = P * c_ / l
print("Reakcija A:", A)
B = P * c / l
print("Reakcija B:", B, "\n")

# funkcija za izračun upogibnega momenta v odvisnosti od x
def m_x(x):
    if x < c:
        return P * c_ * x / l
    else:
        x_ = l - x
        return P * c * x_ / l

# funkcija za izračun vertikalnega pomika v odvisnosti od x
def w_x(x):
    if x < c:
        return P * l**3 / 6 / E / I * (c_ * x / l**2 - c_**3 * x / l**4 - c_ * x
**3 / l**4)
    else:
        x_ = l - x
        return P * l**3 / 6 / E / I * (c * x_ / l**2 - c**3 * x_ / l**4 - c * x_
**3 / l**4)

# vektorizacija funkcije m_x, da lahko izračunamo za celoten seznam pozicij
M_x = np.vectorize(m_x)

# vektorizacija funkcije w_x, da lahko izračunamo za celoten seznam pozicij
W_x = np.vectorize(w_x)


# izračun momentov
momenti = M_x(X)

# izračun pomikov
pomiki = W_x(X)

print("Pozicija | Upogibni | Pomik")
for c1, c2, c3 in zip(X, momenti, pomiki):
    print("%2f | %2f | %s" % (c1, c2, c3))

```

```
76 # izračun maksimalnih in minimalnih vrednosti
77 min_m = np.min(momenti)
78 print("Najmanjši moment:", min_m)
79 max_m = np.max(momenti)
80 print("Največji moment:", max_m)
81 min_w = np.min(pomiki)
82 print("Najmanjši pomik:", min_w)
83 max_w = np.max(pomiki)
84 print("Največji pomik:", max_w)
85
86
87 # risanje grafov s knjižnico matplotlib
88 fig, axs = plt.subplots(2, 1, sharex=True)
89
90 # graf pomikov
91 axs[0].plot(X, pomiki)
92 axs[0].set_ylabel('Pomik w', fontsize=12)
93 axs[0].invert_yaxis()
94
95 # graf momentov
96 axs[1].plot(X, momenti, label="Upogibni momenti (M)")
97 axs[1].set_ylabel('Moment M', fontsize=12)
98 axs[1].set_xlabel('Koordinata x', fontsize=12)
99 axs[1].invert_yaxis()
100
101 plt.show()
```

Razlaga vrstic programske kode

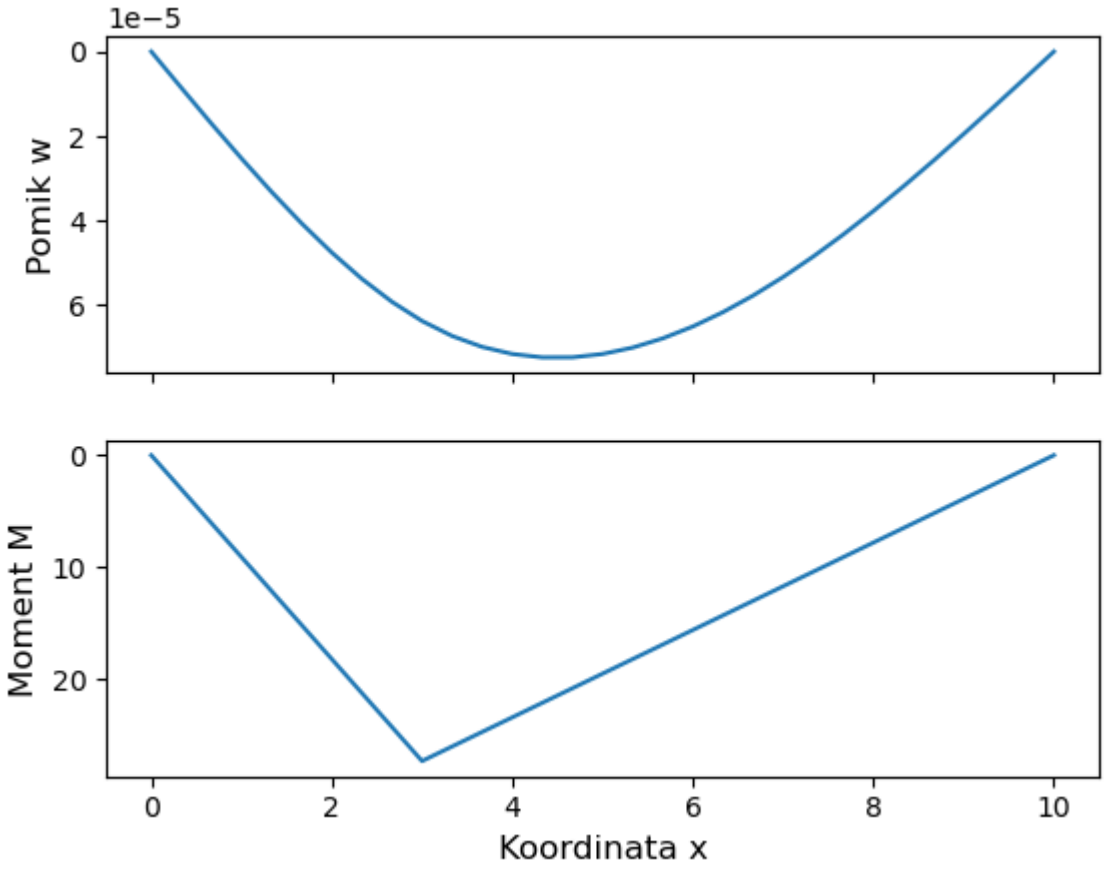
vrstica	komentar
1	Uvozimo `numpy` v spremenljivko (objekt) z imenom `np`.
2	Uvozimo `matplotlib.pyplot` v spremenljivko (objekt) z imenom `plt`, ki jo bomo potrebovali za risanje grafov.
4-24	Določimo podatke o nosilcu, vrednosti shranimo v spremenljivke `l` (dolžina nosilca), `E` (elastični modul), `I` (vztrajnostni moment prereza), `c` (pozicija obtežbe merjeno z leve strani), `c_` (pozicija obtežbe merjeno z desne strani) in `P` (velikost obtežbe) ter s funkcijo `print()` izpišemo vrednosti.
26-29	Definiramo spremenljivko `st_tock`, ki določa, v koliko točkah znotraj nosilca se bodo izračunali momenti in pomiki. Vrednost s funkcijo `print()` tudi izpišemo.
31-33	S funkcijo `np.linspace()` definiramo seznam pozicij `X` za izračun momentov in pomikov. Seznam s funkcijo `print()` tudi izpišemo.
37-41	Izračunamo reakciji v levi podpori (vrednost `A`) ter v desni podpori (vrednost `B`) ter ju s funkcijo `print()` tudi izpišemo.
43-49	Definiramo funkcijo `m_x(x)` za izračun upogibnega momenta v odvisnosti od koordinate x.
51-57	Definiramo funkcijo `w_x(x)` za izračun vertikalnega pomika v odvisnosti od koordinate x.
60	Vektoriziramo funkcijo `m_x(x)` in jo shranimo kot `M_x`.
63	Vektoriziramo funkcijo `w_x(x)` in jo shranimo kot `W_x`.
67	Izvrednotimo vrednosti momentov vzdolž nosilca in jih shranimo v seznam `momenti`.

vrstica	komentar
70	Izvrednotimo vrednosti pomikov vzdolž nosilca in jih shranimo v seznam `pomiki`.
72-74	Za vse točke znotraj elementa izpišemo vrednost pozicije (koordinate), vrednost momenta in vrednost pomikov.
76-84	Določimo največje in najmanjše vrednosti upogibnih momentov in vertikalnih pomikov. Vrednosti s funkcijo `print()` tudi izpišemo.
88	Pripravimo spremenljivke za risanje grafov, in sicer pripravimo mrežo slik, ki ima 2 vrstici in 1 stolpec.
90-93	Pripravimo graf pomikov, določimo tekst na y osi ter obrnemo y os.
95-99	Pripravimo graf momentov, določimo tekst na y osi ter obrnemo y os.
101	Grafe prikažemo.

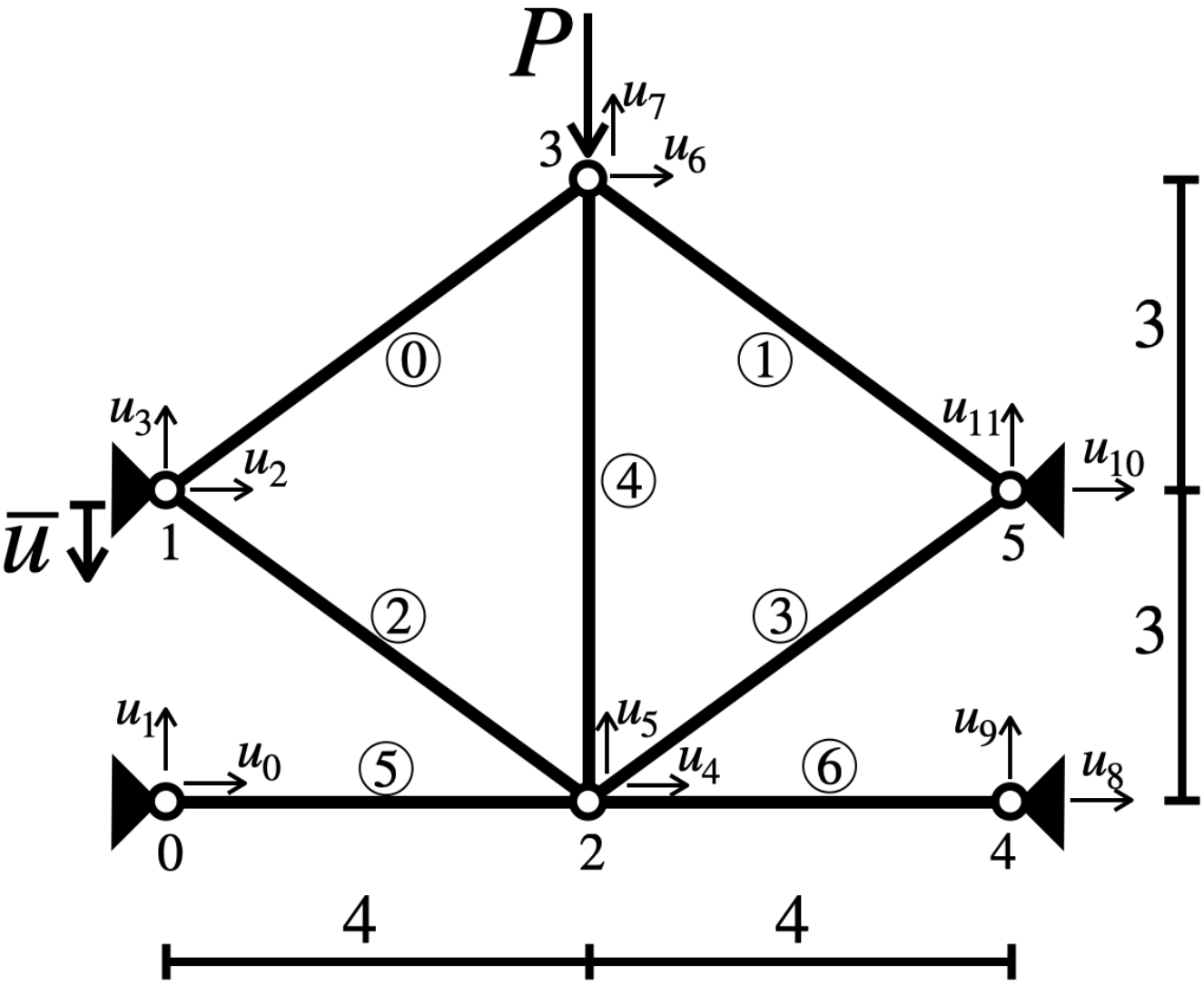
Izpis rešitve

```
PODATKI O NOSILCU
Dolžina nosilca: 10.0
Elastični modul: 3000.0
Vztrajnostni moment: 1000.0
Pozicija obtežbe: 3.0
Obtežba P: 13.0

PODATKI ZA IZRAČUN NOSILCU
Število točka za ozračun: 31
Pozicije točk vzdolž nosilca:
 [ 0.          0.33333333  0.66666667  1.          1.33333333  1.66666667
  2.          2.33333333  2.66666667  3.          3.33333333  3.66666667
  4.          4.33333333  4.66666667  5.          5.33333333  5.66666667
  6.          6.33333333  6.66666667  7.          7.33333333  7.66666667
  8.          8.33333333  8.66666667  9.          9.33333333  9.66666667
 10.        ]

REZULTATI
Reakcija A: 9.1
Reakcija B: 3.9

Pozicija | Upogibni | Pomik
0.000000 | 0.000000 | 0.0
0.333333 | 3.033333 | 8.575720164609052e-06
0.666667 | 6.066667 | 1.7039094650205758e-05
1.000000 | 9.100000 | 2.5277777777777783e-05
1.333333 | 12.133333 | 3.317942386831275e-05
1.666667 | 15.166667 | 4.0631687242798346e-05
2.000000 | 18.200000 | 4.7522222222222235e-05
2.333333 | 21.233333 | 5.373868312757201e-05
2.666667 | 24.266667 | 5.916872427983537e-05
3.000000 | 27.300000 | 6.369999999999999e-05
3.333333 | 26.000000 | 6.724691358024691e-05
3.666667 | 24.700000 | 6.983086419753084e-05
4.000000 | 23.400000 | 7.15e-05
```

```
4.333333 | 22.100000 | 7.230246913580247e-05
4.666667 | 20.800000 | 7.228641975308641e-05
5.000000 | 19.500000 | 7.149999999999998e-05
5.333333 | 18.200000 | 6.999135802469136e-05
5.666667 | 16.900000 | 6.780864197530863e-05
6.000000 | 15.600000 | 6.5e-05
6.333333 | 14.300000 | 6.161358024691357e-05
6.666667 | 13.000000 | 5.7697530864197545e-05
7.000000 | 11.700000 | 5.33e-05
7.333333 | 10.400000 | 4.846913580246913e-05
7.666667 | 9.100000 | 4.3253086419753095e-05
8.000000 | 7.800000 | 3.7699999999999995e-05
8.333333 | 6.500000 | 3.185802469135805e-05
8.666667 | 5.200000 | 2.5775308641975316e-05
9.000000 | 3.900000 | 1.9499999999999996e-05
9.333333 | 2.600000 | 1.308024691358027e-05
9.666667 | 1.300000 | 6.564197530864209e-06
10.000000 | 0.000000 | 0.0
Najmanjši moment: 0.0
Največji moment: 27.3
Najmanjši pomik: 0.0
Največji pomik: 7.230246913580247e-05
```



5.2. Naloga paličje



Slika 2. Ravninsko paličje

S pomočjo knjižnice *numpy* je potrebno v skladu s spodnjimi navodili pripraviti programsko kodo, ki izračuna pomike vozlišč za paličje na sliki Ravninsko paličje. Rešitev najdete v razdelku Rešitev.

- Pripravi seznam koordinat vozlišč ([x0, y0], [x1, y1], ... [x5, y5]) in ga shrani v spremenljivko `vozlisca`.
- Izpiši indekse in koordinate vozlišč.
- Pripravi seznam elementov ([indeks 1. vozlišča, indeks 2. vozlišča], ...) in ga shrani v spremenljivko `povezave`.
- Pripravi sezname: `Xi` - x koordinat 1. vozlišča elementa, `Yi` - y koordinat 1. vozlišča elementa, `Xj` - x koordinat 2. vozlišča elementa, `Yj` - y koordinat 2. vozlišča elementa.
- Pripravi seznam dolžin elementov `Sij`.
- Pripravi seznam kosinusov elementov `L` in `M`.
- Za vse elemente izpiši indeks elementa, indeksa obeh vozlišč, dolžino elementa ter kosinuse elementa.
- Pripravi seznam `EAi`, kamor shraniš zmnožek elastičnega modula in ploščine prečnega preza.
- Pripravi seznam `Ki`, kamor shraniš togostne matrike elementa zapisane v globalnem koordinatnem sistemu.
- Za vse elemente izpiši togostne matrike zapisane v globalnem koordinatnem sistemu.

- Sestavi globalno matriko konstrukcije K.
- Določi pomike vozlišč za primer 1, ko v vozlišču 3 deluje sila z vrednostjo 10 navzdol.
- Določi pomike vozlišč za primer 2, ko se vozlišče 1 premakne za 3cm navzdol.
- Manjkajoče izraze za zgornje količine lahko najdete na tej povezavi Statika linijskih konstrukcij, Zgledi za račun linijskih konstrukcij po metodi končnih elementov, 1.1 Ravninsko paličje, Janez Duhovnik, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, 1998 [https://www.klancek.si/sites/default/files/datoteke/files/mke-duhovnik.pdf].

Naloga je povzeta iz Statika linijskih konstrukcij, Zgledi za račun linijskih konstrukcij po metodi končnih elementov, 1.1 Ravninsko paličje, Janez Duhovnik, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, 1998 [https://www.klancek.si/sites/default/files/datoteke/files/mke-duhovnik.pdf], kjer je navedena tudi podrobna rešitev brez uporabe računalnika.

5.2.1. Rešitev

Programska koda

```
import numpy as np

# primer 1.1 povzet iz
https://www.klancek.si/sites/default/files/datoteke/files/mke-duhovnik.pdf

# koordinate vozlišč
vozlisca = np.array([[0,0],[0,3],[4,0],[4,6],[8,0],[8,3]])
print("Vozlišče | koordinata")
for i, v in enumerate(vozlisca):
    print(f"  {i}      |   {v}")

# Seznam povezav za vse elemente [zacetno_vozlisce, koncno_vozlisce]
povezave = np.array([[1, 3], [3, 5], [1, 2], [2, 5], [2, 3], [0, 2], [2, 4]])

# koordinate vozlišč za vse elemente
XYij = vozlisca[povezave]
# X koordinate 1. vozlišča
Xi = XYij[:,0,0]
# Y koordinate 1. vozlišča
Yi = XYij[:,0,1]
# X koordinate 2. vozlišča
Xj = XYij[:,1,0]
# Y koordinate 2. vozlišča
Yj = XYij[:,1,1]

# dolžine elementov
Sij = np.sqrt((Xj-Xi)**2+(Yj-Yi)**2)

# kosinusi elementov
L = (Xj - Xi) / Sij
M = (Yj - Yi) / Sij

```

```
# izpis podatkov o elementih
print("Elem. | i-j | sij | l   | m")
for i, (v, sij, l, m) in enumerate(zip(povezave, Sij, L, M)):
    print(f"  {i}   | {v[0]}-{v[1]} | {sij} | {l} | {m}")

# seznam EA za vse elemente, upošteva, da so vse togosti enake Ei * Ai / si = a
EAi = Sij

# Togostne matrike elementov v glavnem KS
Ki = np.zeros((len(L), 4, 4))
Ki[:,0,0] = EAi / Sij * L**2
Ki[:,0,1] = EAi / Sij * L*M
Ki[:,0,2] = EAi / Sij * -L**2
Ki[:,0,3] = EAi / Sij * -L*M

Ki[:,1,0] = EAi / Sij * L*M
Ki[:,1,1] = EAi / Sij * M**2
Ki[:,1,2] = EAi / Sij * -L*M
Ki[:,1,3] = EAi / Sij * -M**2

Ki[:,2,0] = EAi / Sij * -L**2
Ki[:,2,1] = EAi / Sij * -L*M
Ki[:,2,2] = EAi / Sij * L**2
Ki[:,2,3] = EAi / Sij * L*M

Ki[:,3,0] = EAi / Sij * -L*M
Ki[:,3,1] = EAi / Sij * -M**2
Ki[:,3,2] = EAi / Sij * L*M
Ki[:,3,3] = EAi / Sij * M**2

for el, ki in enumerate(Ki):
    print("Togostna matrika elementa", el)
    print(ki)

# Togostna matrika konstrukcije
K = np.zeros((len(vozlisca)*2,len(vozlisca)*2))

# Sestavljanje togostne matrike iz prispevkov posameznih elementov
for voz, ki in zip(povezave, Ki):
    # indeksi vozlišč elementa
    i, j = voz

    # vsako vozlišč ima po 2 prostostni stopnji
    # dodajanje podmatrik elemnta po delih v matriko konstrukcije
    K[2*i:2*i+2,2*i:2*i+2] += ki[0:2,0:2]
    K[2*j:2*j+2,2*j:2*j+2] += ki[2:4,2:4]
    K[2*i:2*i+2,2*j:2*j+2] += ki[0:2,2:4]
    K[2*j:2*j+2,2*i:2*i+2] += ki[2:4,0:2]

```

```
print("Globalna togostna matrika\n",K)
####################
# Primer 1, sila
####################

# Vektor obtežbe na konstrukcij za primer 1, sila 10 navzdol v vozlišču 3
F1 = np.zeros((len(vozlisca)*2))
F1[3*2+1] = -10

# Reducirana togostna matrika, samo prosti pomiki 4, 5, 6, 7
Kmm1 =  K[4:8,4:8]
print("Reducirana togostna matrika primer 1:\n", Kmm1)

# Reduciran obtežni vektor
Fm1 = F1[4:8]
print("Reduciran obtežni vektor primer 1:\n", Fm1)

# Izračun neznanih pomikov za 1. primer
x1 = np.linalg.solve(Kmm1, Fm1)
print("Pomiki v prostih vozliščih primer 1:\n", x1)


####################
# Primer 2, pomik
####################

# predpisan pomik 3 za 3 cm navzdol
u2 = np.zeros((len(vozlisca)*2))
u2[3] = -0.03

# novi položaji vrstic/stolpcev, da so togosti povezane z neznanimi pomiki spodaj desno.
# 4 -> 8, 5 -> 9, 6->10, 7->11
nov_polozaj = np.array([0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 4, 5, 6, 7])

# preurejena togostna matrika, najprej zamenjamo vrstice, nato še stolpce
K2 = K[nov_polozaj]
K2 = K2 [:, nov_polozaj]

# Reducirana togostna matrika, neznani pomiki na zadnjih 4 mestih
Kmm2 = K2[8:,8:]
print("Reducirana togostna matrika primer 2:\n", Kmm2)

# Izračun obtežnega vektorja zaradi vsiljenih pomikov
Kmr2 = K2[8:,:8]
ur2 = u2[nov_polozaj][:8]
F2 = -np.dot(Kmr2,ur2)
print("Reduciran obtežni vektor primer 2:\n", F2)

```

```
# Izračun neznanih pomikov za 2. primer
x2 = np.linalg.solve(Kmm2, F2)
print("Pomiki v prostih vozliščih primer 2:\n", x2)
```

Razlaga vrstic programske kode

vrstica	komentar
1	Uvozimo `numpy` v spremenljivko (objekt) z imenom `np`.
6-10	V spremenljivko `vozlisca` shranimo koordinate vozlišč ter jih znotraj zanke po vozliščih s funkcijo `print()` izpišemo.
13	Definiramo seznam elementov oziroma povezav med vozlišči in shranimo v spremenljivko `povezave`.
15-24	Določimo koordinate prvega in drugega vozlišča za vsak element posebej in shranimo v seznam `XYij`. Vrednosti ločimo na ločene sezname `Xi` (x-i prvih vozlišč elementov), `Yi` (y-i prvih vozlišč elementov), `Xj` (x-i drugih vozlišč elementov), `Yj` (y-i drugih vozlišč elementov).
27	Določimo dolžine vseh elementov in jih shranimo v seznam `Sij`
29-31	Določimo kosinuse elementov in jih shranimo v seznama `L` in `M`.
33-36	Za vse elemente s funkcijo `print()` izpišemo indeks elementa, indeksa obeh vozlišč, dolžino elementa ter kosinuse elementa.
38	Definiramo seznam `EAi`, v katerega shranimo osne togosti elementov. Upoštevamo, da so vse togosti enake Ei * Ai / si = a, da lahko primerjamo z rezultati iz https://www.klancek.si/sites/default/files/datoteke/files/mke-duhovnik.pdf
41-61	Določimo togostne matrike za vse elemente in jih shranimo v seznam `Ki`. Najprej pripravimo seznam, ki vsebuje same ničle. Nato pa dopolnjujemo vrednosti za vsak element togostne matrike posebej.
63-65	Izpišemo vrednosti togostnih matrik vseh elementov.
68	Definiramo seznam `K`, ki vsebuje same ničle, ki se bo uporabil za določitev togostne matrike konstrukcije.
70-82	Z zanko po vseh elementih sestavljamo togostno matriko konstrukcije. Dodajanje matrike posameznega elementa je razdeljeno na 4 podmatrike. Matriko `K` s funkcijo `print()` tudi izpišemo.
87-89	Pripravimo seznam `F`, v katerega shranimo vektor obtežbe na konstrukcijo za primer, ko v vozlišču 3 deluje sila z vrednostjo 10 v smeri navzdol.
91-93	Pripravimo in izpišemo reducirano togostno matriko `Kmm1`, ki upošteva le proste pomike.
95-97	Pripravimo in izpišemo reduciran obtežni vektor `Fm1`.
99-101	Neznane vrednosti pomikov izračunamo, shranimo v seznam `x1` in izpišemo.
108-110	Pripravimo seznam `u2`, v katerega shranimo vrednosti predpisanih pomikov. Pomik vozlišča 3 za 0.03 navzdol.
114	Določimo nove položaje vrstic oziroma stolpcev z namenom, da so togosti povezane z neznanimi pomiki spodaj in desno v togostni matriki.
116-118	Preuredimo togostno matriko in jo shranimo v spremenljivko `K2`. Najprej zamenjamo vrstice, nato še stolpce.
120-122	Pripravimo in izpišemo reducirano togostno matriko `Kmm2`, ki upošteva le proste pomike.
124-128	Pripravimo in izpišemo reduciran obtežni vektor `F2`, ki upošteva obremenitev zaradi vsiljenega pomika.
130-132	Neznane vrednosti pomikov izračunamo, shranimo v seznam `x2` in izpišemo.

Izpis rešitve

```
Vozlišče | koordinata
  0      |   [0 0]
  1      |   [0 3]
  2      |   [4 0]
  3      |   [4 6]
  4      |   [8 0]
  5      |   [8 3]
Elem. | i-j | sij | l   | m
  0   | 1-3 | 5.0 | 0.8 | 0.6
  1   | 3-5 | 5.0 | 0.8 | -0.6
  2   | 1-2 | 5.0 | 0.8 | -0.6
  3   | 2-5 | 5.0 | 0.8 | 0.6
  4   | 2-3 | 6.0 | 0.0 | 1.0
  5   | 0-2 | 4.0 | 1.0 | 0.0
  6   | 2-4 | 4.0 | 1.0 | 0.0
Togostna matrika elementa 0
[[ 0.64  0.48 -0.64 -0.48]
 [ 0.48  0.36 -0.48 -0.36]
 [-0.64 -0.48  0.64  0.48]
 [-0.48 -0.36  0.48  0.36]]
Togostna matrika elementa 1
[[ 0.64 -0.48 -0.64  0.48]
 [-0.48  0.36  0.48 -0.36]
 [-0.64  0.48  0.64 -0.48]
 [ 0.48 -0.36 -0.48  0.36]]
Togostna matrika elementa 2
[[ 0.64 -0.48 -0.64  0.48]
 [-0.48  0.36  0.48 -0.36]
 [-0.64  0.48  0.64 -0.48]
 [ 0.48 -0.36 -0.48  0.36]]
Togostna matrika elementa 3
[[ 0.64  0.48 -0.64 -0.48]
 [ 0.48  0.36 -0.48 -0.36]
 [-0.64 -0.48  0.64  0.48]
 [-0.48 -0.36  0.48  0.36]]
Togostna matrika elementa 4
[[ 0.  0. -0. -0.]
 [ 0.  1. -0. -1.]
 [-0. -0.  0.  0.]
 [-0. -1.  0.  1.]]
Togostna matrika elementa 5
[[ 1.  0. -1. -0.]
 [ 0.  0. -0. -0.]
 [-1. -0.  1.  0.]
 [-0. -0.  0.  0.]]
Togostna matrika elementa 6
[[ 1.  0. -1. -0.]
 [ 0.  0. -0. -0.]
```

```
 [-1. -0.  1.  0.]
 [-0. -0.  0.  0.]]
Globalna togostna matrika
 [[ 1.    0.    0.    0.   -1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.  ]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.  ]
 [ 0.    0.    1.28  0.   -0.64  0.48 -0.64 -0.48  0.    0.    0.    0.  ]
 [ 0.    0.    0.    0.72  0.48 -0.36 -0.48 -0.36  0.    0.    0.    0.  ]
 [-1.    0.   -0.64  0.48  3.28  0.    0.    0.   -1.    0.   -0.64 -0.48]
 [ 0.    0.    0.48 -0.36  0.    1.72  0.   -1.    0.    0.   -0.48 -0.36]
 [ 0.    0.   -0.64 -0.48  0.    0.    1.28  0.    0.    0.   -0.64  0.48]
 [ 0.    0.   -0.48 -0.36  0.   -1.    0.    1.72  0.    0.    0.48 -0.36]
 [ 0.    0.    0.    0.   -1.    0.    0.    0.    1.    0.    0.    0.  ]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.  ]
 [ 0.    0.    0.    0.   -0.64 -0.48 -0.64  0.48  0.    0.    1.28  0.  ]
 [ 0.    0.    0.    0.   -0.48 -0.36  0.48 -0.36  0.    0.    0.    0.72]]
Reducirana togostna matrika primer 1:
 [[ 3.28  0.    0.    0.  ]
 [ 0.    1.72  0.   -1.  ]
 [ 0.    0.    1.28  0.  ]
 [ 0.   -1.    0.    1.72]]
Reduciran obtežni vektor primer 1:
 [  0.   0.   0. -10.]
Pomiki v prostih vozliščih primer 1:
 [ 0.         -5.10620915  0.         -8.78267974]
Reducirana togostna matrika primer 2:
 [[ 3.28  0.    0.    0.  ]
 [ 0.    1.72  0.   -1.  ]
 [ 0.    0.    1.28  0.  ]
 [ 0.   -1.    0.    1.72]]
Reduciran obtežni vektor primer 2:
 [ 0.0144 -0.0108 -0.0144 -0.0108]
Pomiki v prostih vozliščih primer 2:
 [ 0.00439024 -0.015      -0.01125    -0.015     ]
```

Poglavje 6. Dodatni viri

Pri pripravi dokumenta so bile v pomoč naslednje spletne strani in pripadajoče vaje (angl. tutorial):

- Numpy [https://numpy.org/doc/stable/index.html]
- Geeksforgeeks [https://www.geeksforgeeks.org/numpy-tutorial/]
- Tutorialspot [https://www.tutorialspoint.com/numpy/index.htm]
- Programiz [https://www.programiz.com/python-programming/numpy]
- W3school [https://www.w3schools.com/python/numpy/]
- NumPy Tutorial (2022): For Physicists, Engineers, and Mathematicians [https://www.youtube.com/watch?v=DcfYgePyedM]