

# Numerični postopki obravnavanja gibanja GPS-satelitov

Polona Pavlovčič Prešeren<sup>\*</sup>, Bojan Stopar<sup>\*\*</sup>

## Kratka vsebina

Postopki satelitske geodezije, ki jih uporabljamo za določanje položajev objektov na Zemlji ali v njeni bližini, temeljijo na zahtevi natančne določitve položajev navigacijskih satelitov v poljubnem trenutku. Kvalitetna določitev položajev objektov na zemeljski površini je odvisna od natančnosti satelitskih opazovanj ter od natančnosti določitve položajev umetnih satelitov. Ti predstavljajo referenčne točke za opazovanja, njihovo vlogo pa lahko opišemo tudi s spremljanjem periodičnih dogajanj v okolici Zemlje in v atmosferi. Uporabnik satelitske tehnologije (npr. GPS, GLONASS in v prihodnosti GALILEO) mora zato poleg opazovanj pridobiti tudi podatke za izračun položajev satelitov – tako imenovane efemeride. V primeru tehnologije GPS iz glavne kontrolne postaje v Colorado Springsu vnaprej pripravljene efemeride pošiljajo GPS-satelitom, da jih le-ti poleg opazovanj oddajajo uporabnikom. Bolj kakovostne podatke za izračun položajev satelitov proizvajajo GPS-službe in podatke posredujejo prek spleta. Ker se podatki za izračun položajev satelitov razlikujejo po načinu prejema, natančnosti in vrsti vsebovanih informacij, so s posameznimi vrstami efemerid povezani specifični numerični postopki izračuna položajev umetnih satelitov in nadaljnje obravnavanje gibanja le-teh.

KLJUČNE BESEDE: astrodinamika, GPS-satelit, referenčna točka, periodična dogajanja, glavna kontrolna postaja, oddane/precizne efemeride,

## Uvod

Problem obravnavanja gibanja naravnih in umetnih objektov v vesolju že več stoletij predstavlja izziv astrodinamike. V zadnjih desetletjih je razvoj modernih satelitskih tehnik po eni strani omogočil pridobitev visokonatančnih podatkov za obdelavo in po drugi strani narekoval določitev položaja objektov v vesolju še z višjo stopnjo točnosti.

Proučevanje gibanja umetnih satelitov je pomembno z več vidikov: v satelitski navigaciji – v nadaljevanju bomo podrobneje obravnavali tehnologijo GPS (angl. *Global Positioning System*) – so sateliti referenčne točke za opazovanja, to je točke z znanim položajem v konkretnem koordinatnem sistemu. Spremljanje periodično ponavljajočih se motenj v gibanju umetnih satelitov služi za pridobivanje informacij o zunanjih vplivih na umetne satelite – na ta način so že določili modele gravitacijskega potenciala in modele plimovanja Zemlje. Prek modelov, ki opisujejo motnje v gibanju satelitov, lahko predstavimo spremembe v gibanju umetnih satelitov, kar bo v prihodnosti pomembno orodje pri spremljanju gibanja obrabljenih umetnih satelitov, ki lahko s trki ogrozijo delovanje drugih satelitov, ki služijo kot pomoč pri komunikaciji na zemeljskem površju.

V zadnjem času znanstveniki poudarjajo pomembno vlogo satelitskih tehnologij v prihodnosti - z navigacijskimi sateliti naj bi vzpostavili zemeljsko neodvisni koordinatni sestav visoke točnosti, ki bo služil za spremljanje neenakomerne rotacije Zemlje in premikov na zemeljskem površju.

## Podatki za numerično obravnavanje gibanja umetnih satelitov

Zasnova satelitske navigacije je bila vzpostavljena tako, da uporabnik hkrati z opazovanji dobi podatke za izračun položajev satelitov v kateremkoli trenutku – v

---

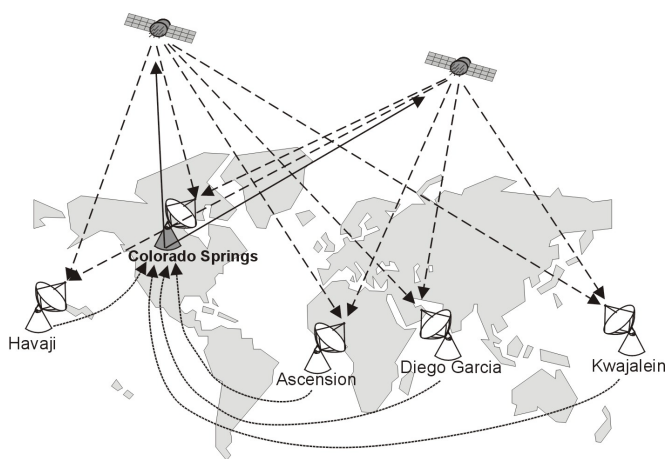
<sup>\*</sup> asist. dr., FGG, Oddelek za geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

<sup>\*\*</sup> izr. prof. dr., FGG, Oddelek za geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

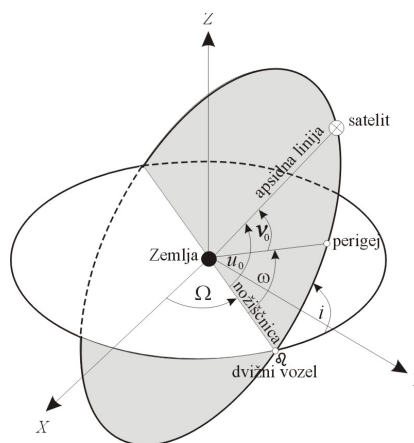
povezavi s temi podatki govorimo o oddanih (angl. *broadcast*) efemeridah. Alternativno predstavljajo precizne efemeride, ki jih GPS-službe prek spleta posredujejo uporabnikom. Oddane in precizne efemeride se razlikujejo glede osnovne oblike podatkov, ki jih vsebujejo, po natančnosti in časovni zakasnitvi dostopa do podatkov. Zato so se v skladu z lastnostmi posameznih vrst podatkov oblikovale različne metode izračuna položajev GPS-satelitov na tirnici in obravnavanje gibanja le-teh.

Delovanje navigacijskih satelitskih tehnologij je specifično ravno s stališča pridobivanja podatkov in načina izračuna gibanja satelitov po tirnici. Sistem je vzpostavljen tako, da uporabnik z opazovanji pridobi dejanska opazovanja in podatke za izračun položajev satelitov na tirnici.

GPS-sateliti oddajajo fazna opazovanja, ki jih poleg uporabnikov prejemajo opazovalne postaje, razporejene vzdolž ekvatorja. Podatke opazovanj pošljejo v glavno kontrolno postajo v Colorado Springsu, kjer se vrši obdelava in predvidi položaje satelitov za vsaj 24 ur vnaprej. Predvidene podatke iz Colorado Springsa pošljejo vsem GPS-satelitom, ki poleg opazovanj uporabnikom na zemeljskem površju posredujejo tudi predvidene podatke o položajih satelitov – gre za oddane efemeride.



Slika 1: Zasnova tehnologije GPS



Slika 2: Keplerjeva elipsa tira – elementi oddanih efemerid

Uporabnik GPS-tehnologije dobi nov niz oddanih efemerid vsaki dve uri, saj starost podatkov negativno vpliva na natančnost določitve položaja satelita na tirnici. Podatki so predstavljeni s Keplerjevimi elementi elipse tira in pripadajočimi popravki, dobljenimi s postopkom trigonometrične aproksimacije (popravki inklinacije  $i$ , argumenta širine  $u$  in radij vektorja  $r$  so predstavljeni kot sinusni oz. kosinusni harmonični koeficienti). S Keplerjevimi elementi elipse tira lahko enostavno določimo vektor položaja oziroma hitrosti in obratno:

$$[a, e, i, \omega, \Omega, M] \leftrightarrow \vec{r}, \vec{v},$$

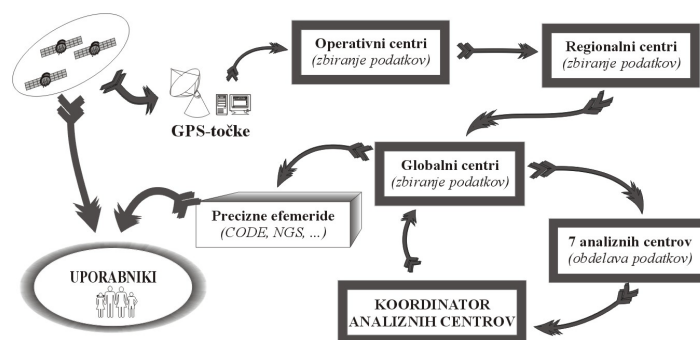
kjer so:

- $a$  velika polos elipse tira (Zemlja je v enem izmed gorišč),
- $e$  ekscentriciteta elipse tira,
- $i$  inklinacija,
- $\omega$  argument perigeja,
- $\Omega$  rektascenzija dvižnega vozla,
- $M$  prava anomalija,
- $u$  argument širine.

Precizne efemeride, ki jih uporabnik pridobi prek spleta, določijo nekoliko drugače. V mrežo opazovalnih postaj je vključenih več točk (200 in več). Podatke opazovanj opazovalne postaje pošiljajo operativnim, regionalnim in globalnim centrom. Slednji zbirajo podatke in jih pošiljajo sedmim analiznim centrom, kjer neodvisno poteka obdelava. Končne rezultate pošljejo Centralnemu biroju službe IGS (angl. *International GPS Service*), ki dodatno združi rezultate obdelave analiznih centrov in proizvede končne precizne efemeride.

Ker je zbiranje podatkov ter obdelava dogotrajen postopek, končne precizne efemeride pridobimo z zakasnitvijo 10-14 dni, odvisno od dneva v tednu. Tudi oblika podatkov je drugačna – za vsak GPS-satelit so z intervalom 15-ih minut predstavljene komponente vektorja položaja, včasih tudi hitrosti.

Služba IGS je do leta 2001 večino pomanjkljivosti v povezavi s časovno zakasnitvijo pridobitve preciznih efemerid odpravila – manj natančne podatke ( $\sigma_p \approx 10$  cm) t. i. hitre efemeride (angl. IGS rapid ephemerides) posreduje tri dni po končani izmeri oziroma od leta 2001 tudi vnaprej; govorimo o najhitrejših efemeridah (angl. IGS ultra rapid ephemerides) ( $\sigma_p \approx 5$  dm).



Slika 3: Delovanje službe IGS, ki nudi uradne precizne efemeride.

### Metode za izračun položajev satelitov na tirnici

Gibanje objektov v vesolju lahko le v prvi aproksimaciji predstavimo z gibanjem po elipsi tira, katere osnova so Keplerjevi zakoni. Dejansko gibanje umetnih objektov vesolju je podvržemo zunanji vplivom, ki jih je v visokonatančnih študijah potrebno modelirati in v izračunu upoštevati. Znanih je več matematičnih pristopov reševanja problema gibanja, ki so odvisni predvsem od razpoložljivih izhodiščenih podatkov.

#### Numerična integracija

Osnova najbolj natančnim metodam izračuna položaja satelita na tirnici je reševanje enačbe gibanja, to je diferencialne enačbe drugega reda, zapisane v nebesnem koordinatnem sistemu (Montenbruck, Gill, 2000):

$$\vec{a} = -\frac{GM_{\oplus}}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} + \Delta\vec{a}, \quad (1)$$

z začetnima pogojeva  $\vec{r}_0$  in  $\vec{v}_0$ , kjer so:

- $\vec{a}$  celotni pospešek kot vsota delnih pospeškov zaradi delovanja zunanjih sil,
- $GM_{\oplus}$  produkt gravitacijske konstante  $G$  in mase Zemlje  $M_{\oplus}$ ,
- $\vec{r}$  radij vektor satelita v nebesnem koordinatnem sistemu,
- $\vec{v}$  vektor hitrosti satelita v nebesnem koordinatnem sistemu,
- $\vec{\Delta a}$  pospešek kot vsota zunanjih vplivov, ki ne izhajajo iz privlačne sile Zemlje kot homogenega telesa.

V drugem členu desne strani enačbe (1) so v obliki pospeška zmodelirani vplivi zunanjih sil, kot so: nesferična porazdelitev zemeljskih mas, vpliv Lune, Sonca in drugih planetov, direktni in posredni vpliv sončnega sevanja, zračni upor, plimovanje čvrste Zemlje in oceanov, relativistični vplivi, elektromagnetni vplivi, vpliv izgorevanja goriva v motorjih satelitskega sistema ...

Matematično k problemu pristopimo z numerično rešitvijo diferencialne enačbe drugega reda z enočlenskimi metodami, kot sta: Runge-Kutta-Nyström za direktno reševanje enačbe drugega reda ali Runge-Kutta za dvakratno reševanje enačbe, najprej do pridobitve vektorja hitrosti in nato do vektorja položaja, ter z veččlenskimi metodami, kot so: Gauss-Jackson in Störmer-Cowell za reševanje diferencialnih enačb drugega reda ter Adams-Bashforth in Adams Moulton za reševanje diferencialnih enačb prvega reda.

Postopek reševanja problema z numerično integracijo je zahteven tudi zato, ker moramo poleg zunanjih vplivov na gibanje umetnega satelita zmodelirati tudi pojave precesije, nutacije, rotacije Zemlje in gibanja polov, da lahko izračune izvedemo v nebesnem in terestričnem koordinatnem sistemu.

### Interpolacija

Diskretni podatki o položajih satelitov, ki so podani v časovno ekvidistantnih tabelah, omogočajo uporabo interpolacijskih tehnik pri izračunu položaja umetnega satelita v poljubnem trenutku. Interpolacijske metode so za uporabo enostavnejše in veliko hitrejše kot postopki numerične integracije, saj v postopku računanja ne modeliramo zunanjih sil na gibanje umetnega satelita, ampak iz danih diskretnih podatkov o položaju satelita na tirnici modeliramo interpolacijski polinom. Druga prednost uporabe postopkov interpolacije izhaja iz možnosti, da interpolacijski polinom določimo v kateremkoli koordinatnem sistemu (nasprotno kot pri zahtevah numerične integracije). Glede na to, da interpolacijske metode ne temeljijo na fizikalnem ozadju določanja vplivov na gibanje satelitov, so v smislu natančnosti manj učinkovite in je rezultate računanja vedno potrebno ovrednotiti z rezultati, pridobljenimi z bolj natančnimi postopki, npr. z numerično integracijo.

Značilna slabosti uporabe interpolacijskih polinom je nihanje (osciliranje) interpolacijskega polinoma, kar je posebno izrazito na krajiščih interpolacijskega intervala. Zato postopke interpolacije izvajamo odsekoma s polinomi  $n$ -te stopnje tako, da polinom služi za izračun novih položajev satelitov le na sredini interpolacijskega območja.

V povezavi s problemom izračuna GPS-satelitov v poljubnem trenutku iz podatkov preciznih efemerid se je najbolj uveljavila uporaba Lagrangevega polinoma različnih stopenj (od 8 do 11, celo do 22), uporabne so tudi druge vrste polinomov: Nevillov polinom, Newtonov polinom, interpolacija z diferenčnimi tabelami, z zlepkami in trigonometrična interpolacija.

Postopki interpolacije so primerni tudi takrat, ko želimo določene podatke shraniti v tako imenovani stisnjeni obliki – namesto, da bi skladiščili podatke o položajih satelitov za kratek časovni interval (v primeru GPS nas zanimajo tudi intervali velikosti

nanosekunde), raje skladiščimo koeficiente interpolacijskih polinomov. S temi lahko naknadno določimo položaj satelita v kateremkoli trenutku. Pri tem si pomagamo s Čebiševim polinomom.

### Aproksimacija s trigonometričnimi vrstami

V primeru obravnavanja tirnic GPS-satelitov je najbolj uporabna tehnika, ki jo uporabljamo za določitev položajev satelitov v poljubnem trenutku, prilagoditev trigonometričnih polinomov po kriterijih, značilnih za metodo najmanjših kvadratov. Na ta način so določeni tudi podatki oddanih efemerid.

Metodo je primerneje uporabiti v povezavi z obravnavanjem Keplerjevih elementov elipse tira, za katere so značilne dolgoperiodične in kratkoperiodične spremembe. Slednje najlažje opišemo s sinusno-kosinusnimi harmoničnimi koeficienti. Od tod izhajajo dodatni parametri popravkov za nekatere elemente Keplerjeve elipse tira v datotekah oddanih efemerid ( $Cuc$ ,  $Cus$ ,  $Cic$ ,  $Cis$ ,  $Crc$ ,  $Crs$ ), da lahko upoštevamo velikosti zunanjih vplivov (Zebhauser, 1999):

$$\begin{aligned}\Delta u &= Cuc \cdot \cos(u) + Cus \cdot \sin(u) \\ \Delta r &= Crc \cdot \cos(u) + Crs \cdot \sin(u) \\ \Delta i &= Cic \cdot \cos(u) + Cis \cdot \sin(u)\end{aligned}\tag{2}$$

in naprej določimo položaj satelita v terestričnem (ali nebesnem) koordinatnem sistemu:

$$\begin{aligned}x &= x_{orb} \cdot \cos(\Omega) - y_{orb} \cdot \cos(i) \cdot \sin(\Omega) \\ y &= x_{orb} \cdot \sin(\Omega) + y_{orb} \cdot \cos(i) \cdot \cos(\Omega) \\ z &= y_{orb} \cdot \sin(i),\end{aligned}\tag{3}$$

kjer sta:

$$\begin{aligned}x_{orb} &= r \cdot \cos(u) \\ y_{orb} &= r \cdot \sin(u).\end{aligned}\tag{4}$$

Enako kot pri interpolacijskih metodah lahko opišemo prednost aproksimacijskih metod pred numerično integracijo: metoda ni časovno potratna ter ne temelji na zahtevi po računanju v specifičnem (nebesnem oziroma terestričnem) koordinatnem sistemu.

### Aproksimacija v povezavi z linearnim filtriranjem

Postopek nam omogoča izboljšavo postopka aproksimacije in temelji na dveh korakih: določitev funkcije trenda (aproksimacijske metode) in nadaljnje linearno filtriranje (velikokrat v literaturi v povezavi s postopkom zasledimo pojem kolokacije po metodi najmanjših kvadratov). Prednost linearnega filtriranja pred postopkom izravnave po metodi najmanjših kvadratov bi lahko opisali z možnostjo dodatnega modeliranja lokalnih odstopanj, odvisnih od oddaljenosti med diskretnimi točkami. Če v danih diskretnih točkah zadostimo pogoju normalne porazdelitve, je glavni namen empirična določitev kovariančne funkcije za nadaljnje obravnavanje kovariančnih matrik.

V postopku linearnega filtriranja vektor opazovanj  $l$  izrazimo z vsoto nemodeliranega sistematičnega dela  $s$  in šuma  $r$  (Mikhail, Ackerman, 1976):

$$l = s + r, \quad (5)$$

matematični model izračuna popravkov vrednosti v novih točkah  $s_0$  pa predstavimo kot:

$$s_0 = \Sigma_{s_0l} \Sigma_{ll}^{-1} l, \quad (6)$$

kjer sta:

$\Sigma_{s_0l}$  kovariančna matrika interpolacijske točke glede na dane točke,

$\Sigma_{ll}$  kovariančna matrika v danih diskretnih točkah.

Za določitev funkcije trenda lahko uporabimo katerokoli aproksimacijsko funkcijo, medtem ko postopki interpolacije niso uporabni zato, ker so odstopanja v danih točkah enaka nič. Na danem primeru se je kot uporabno orodje določitve funkcije trenda izkazala tudi umetna nevronska mreža z vzvratnim razširjanjem napake (angl. *backpropagation*) (Pavlovčič Prešeren, 2003).

### Analitične metode

Izmed vseh metod izračuna tirnic GPS-satelitov so bile v preteklosti analitične metode najbolj uporabne, za današnje navigacijske naloge pa zaradi dosegljive natančnosti uporaba ni primerna. Analitične metode reševanja problema tirnic umetnih satelitov služijo tudi kot orodje za predstavitev, kako zunanje sile vplivajo na spremembo velikosti, oblike in orientacije tirnice. Osnova metodam je primerjava dejanskega in idealnega gibanja umetnega satelita z namenom, da odstopanja modeliramo za posamezne elemente Keplerjeve elipse tira.

Analitične metode nam v večini primerov ne omogočajo doseči natančnosti rezultatov numeričnega integriranja, predstavljajo pa možnost predhodnega odločanja o načinu obdelave. Razčlenitev in analiza vplivov na sekularne, dolgoperiodične in kratkoperiodične spremembe v Keplerjevih elementih elipse tira, kar je rezultat analitičnih metod, nam pomagata pri odločitvi o načinu obdelave v smislu iskanja odgovorov na vprašanja, kdaj in kako vplive vključiti v obdelavo (tudi v postopek numerične integracije). Hkrati analitične metode predstavljajo možnost analiz in predvidevanja dogajanj v povezavi z gibanjem umetnih satelitov.

Lahko rečemo, da so analitične metode najbolj splošne metode izračuna tirnic umetnih satelitov, saj služba NORAD vsakodnevno nudi dvovrstične elemente za vse umetne objekte v vesolju.

### **Problematika uporabe podatkov efemerid**

Prednost oddanih efemerid glede na precizno je v hitrosti dostopa do podatkov, saj jih dobimo hkrati z GPS-opazovanji. Uporaba podatkov je hitra in enostavna, saj je vezana na aproksimacijske tehnike določanja položajev, ki niso odvisne od izbire konkretnega koordinatnega sistema. Slabost podatkov oddanih efemerid bi lahko opisali z dosegljivo točnostjo položaja, ki ni zelo visoka (nekaj metrov), saj so podatki določeni na osnovi predhodnega predvidevanja. Prav tako je pomembna tudi starost podatkov oddanih efemerid, saj bistveno vpliva na končno natančnost izračuna položajev satelitov na tirnici.

Problematiko uporabe preciznih efemerid bi lahko razdelili v problem določanja položajev satelitov v poljubnem trenutku in v problem časovne omejitve dostopa do podatkov, in sicer:

⇒ problem določanja položajev satelitov v poljubnem trenutku

Uporaba tehnologije GPS v geodeziji sloni na zaporednem izvajanju GPS-opazovanj, kjer je časovni interval med zaporednimi opazovanji med 1 in 30 sekundami. Pri obdelavi GPS-opazovanj je potrebno določiti položaje opazovanih GPS-satelitov za trenutke, na katere se nanašajo opravljena opazovanja. Problem uporabe preciznih efemerid v obdelavi GPS-opazovanj tako izhaja iz časovno neuskkljenih GPS-opazovanj glede na efemeride (1-30 s : 900 oz. 1200 s). V petnajstih minutah se položaj GPS-satelita spremeni za 3000 kilometrov. Iz tega sledi, da natančne položaje GPS-satelitov znotraj danega časovnega intervala ne moremo pridobiti enostavno z linearno interpolacijo. Polinomska interpolacija sicer predstavlja enostavno rešitev problema, vendar ob tem pride do dodatnega problema odstopanja interpoliranega polinoma od dejanskega tira. Problem je še večji pri postopkih določanja vrednosti funkcij izven definicijskega območja, omejenega z nizom interpolacijskih podatkov, to je v postopku ekstrapolacije. Na gibanje satelitov namreč delujejo zunanje sile, katerih vpliv je tako velik, da ga v obdelavi podatkov ne smemo zanemariti.

⇒ problem časovnega dostopa do podatkov

Največja pomanjkljivost podatkov preciznih efemerid izhaja iz časovne omejenosti dostopa do podatkov, kar je posledica načina pridobivanja le-teh. Precizne efemeride službe določijo po opravljenih opazovanjih. Podatke posredujejo prek spleta. Glede na način obdelave (razlika je v količini podatkov pri obdelavi) je na voljo več vrst podatkov. Razlikujejo se glede na hitrost dostopa do njih, oziroma glede na natančnost podatkov o položajih GPS-satelitov. Najbolj natančne podatke preciznih efemerid službe posredujejo šele 14 dni po končani izmeri, nekoliko manj natančne podatke *hitrih efemerid* do 3 dni po končani izmeri, najmanj natančne podatke preciznih efemerid (*najhitrejše efemeride*) pa od novembra 2001 tudi že za nekaj dni vnaprej.

### **Uporaba metod izračuna položajev satelitov v povezavi s podatki efemerid**

Specifična vrsta podatkov efemerid dovoljuje uporabo le določenih metod. Med naštetimi metodami izračuna položaja satelita na tirnici je postopek numerične integracije tudi najbolj zahteven v smislu podatkov, ki jih moramo imeti na vojo. Ne le, da moramo imeti na voljo začetni vrednosti vektorjev položaja in hitrosti ( $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ ), temveč moramo za korektno modeliranje zunanjih vplivov poznati tudi:

- lastnosti posameznih satelitov (maso, površino sončnih celic, material, iz katerih so le-te skonstruirane ...),
- ter podatke o položaju Lune, Sonca in geometriji Zemlja–satelit–Sonca (Luna) ...
- podatke za pretvorbo med časovnimi sistemi in za modeliranje precesije, nutacije, rotacije Zemlje in gibanja polov.

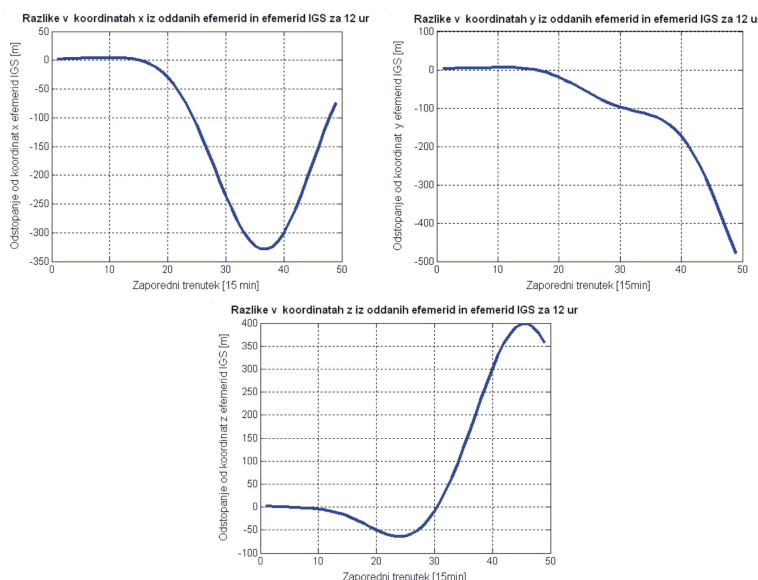
Ostale metode so zaradi tega, ker v izračunu niso v popolnosti upoštevani naštetni faktorji, v smislu računanja manj natančne, glede pridobivanja podatkov in končnega izračuna pa hitreje izvedljive.

Tabela 1: Pregled vrste podatkov in vira ter z njimi povezani načini izračuna položaja satelita v poljubnem trenutku

Vrsta podatkov	Vir podatkov	Uporabne metode
oddane efemeride	GPS-sateliti, datoteka *.EPH	- trigonometrična aproksimacija
precizne efemeride (*.SP3) s podatki o položajih in hitrostih	Služba NIMA, datoteke *.SP3	- numerična integracija - interpolacija - aproksimacija - linearni filter
precizne efemeride (*.SP3) le s podatki o položajih: IGS, IGR, IGU	Službe: CODE, IGS ... , datoteke *.SP3	- interpolacija - aproksimacija - linearni filter
dvovrstični Keplerjevi elementi	NORAD	analitične metode: - Kozai, Brouwer, - SGP4, SGP8, - SDP4, SDP8 ...

### Numerični primeri

Z grafično predstavitevijo rezultatov izračuna prikazujemo glavne pomanjkljivosti podatkov efemerid oziroma postopkov izračuna: Na Sliki 4 prikazujemo problematiko, povezano s starostjo podatkov oddanih efemerid. Aproksimacija tirnice gibanja umetnega satelita je učinkovita le ob uporabi podatkov oddanih efemerid, ki niso starejši od dveh ur. Kasneje odstopanja v izračunu položajev satelitov na tirnici izrazito narastejo in znašajo tudi nekaj sto metrov vzdolž posamezne koordinatne komponente.

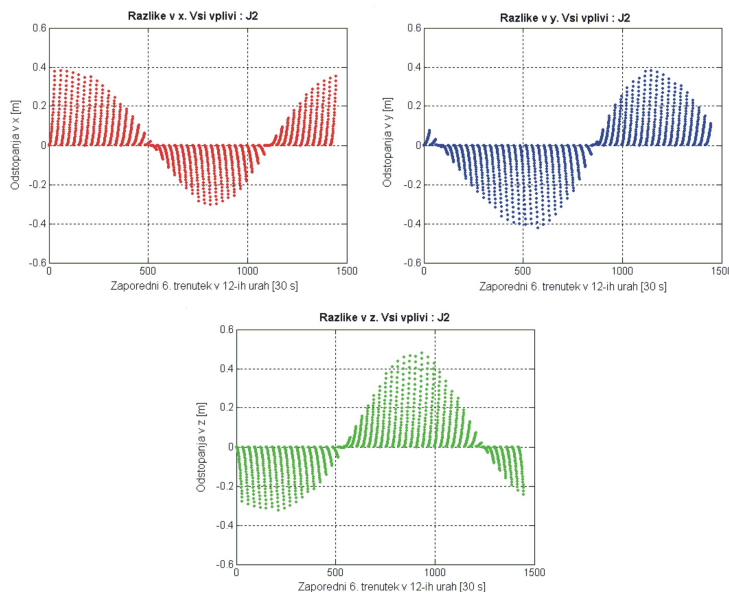


Slika 4: Problematika starosti oddanih efemerid

Najbolj učinkovita metoda glede natančnosti in najmanj primerna glede hitrosti računanja – numerična integracija – je zamuden postopek, saj izračun poteka diskretno po korakih, pri čemer širina koraka  $h$  ne sme biti prevelika. Širino koraka si izberemo glede na hitrost gibanja umetnega satelita (v primeru GPS-satelitov ta znaša približno 4 km/s). Če želimo pridobiti podatke o položaju satelitov znotraj integracijskega intervala, moramo dodatno izvesti numerično integracijo z veččlenskimi metodami. Na Sliki 5 prikazujemo

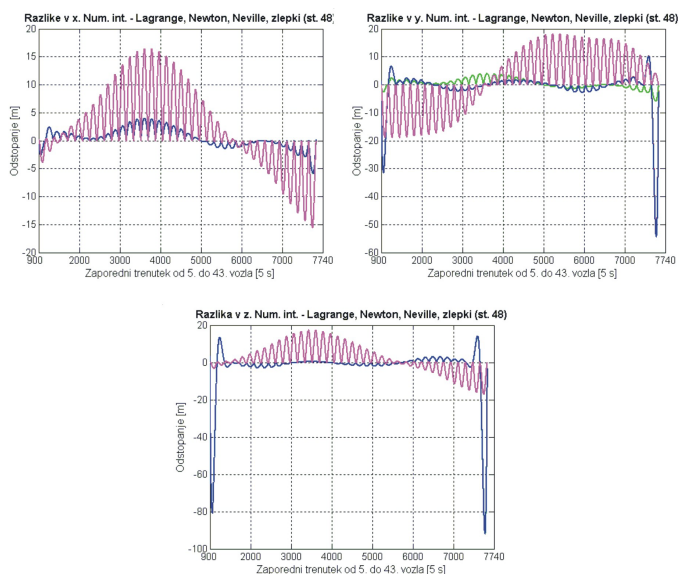


odstopanja rezultatov, če v obdelavo ne vključimo vseh zunanjih vplivov, ampak le vpliv privlačne sile Zemlje, katere gravitacijsko polje opišemo le s conskim koeficientom  $J_2$ .



Slika 5: Primer, ko v obdelavo z numerično integracijo ne vključimo vseh zunanjih vplivov – velikost odstopanj narašča v odvisnosti od položaja GPS-satelita na tirnici.

Določeni programski paketi obdelave GPS-opazovanj imajo kot rešitev izračuna položaja GPS-satelita na tirnici vključene postopke interpolacije. Le-te je potrebno uporabljati z določeno mero previdnosti, saj prek polinoma izračunane vrednosti na krajiščih intervala preveč odstopajo od pravih vrednosti (zaradi pojava nihanja – osciliranja polinoma), medtem ko so na sredini definicijskega območja izračunane vrednosti korektne. Zato uporabljamo tako imenovano diskretno sredinsko interpolacijo – polinome nižjih stopenj (od 8 do 11, tudi do 22) uporabimo le za interpolacijo na sredini definicijskega območja, sledi naknadna določitev drugega interpolacijskega polinoma. Na Sliki 6 predstavljamo problematiko nihanja različnih interpolacijskih polinomov.



Slika 6: Nihanje interpolacijskih polinomov: Lagrange, Newton, Neville

## Zaključek

Raziskovanje tirnic umetnih satelitov je pomembno, saj nam podatki služijo pri iskanju odgovorov na vprašanja o fizikalnih dogajanjih na Zemlji, v okolici in v širšem prostoru. Znanih je več metod izračuna tirnic umetnih satelitov. Najprej so tu analitične metode, ki služijo za proučevanje fizikalnih dogajanj, vendar so za natančno določanje položajev GPS-satelitov neuporabne. V drugi skupini so numerične metode, katerih glavna naloga je natančno določiti položaje umetnih satelitov in kamor uvrščamo numerično integracijo, interpolacijo, aproksimacijo ... Metode izračuna tirnic umetnih satelitov lahko uporabimo le v povezavi z določeno vrsto podatkov efemerid, med seboj pa se razlikujejo tudi po hitrosti računanja in dosegljivi natančnosti končnih rezultatov. Numerične metode so v boju za dosegljivo natančnost sicer nadvladale analitične metode, čeprav je pomembno vedeti, da šele analitične metode omogočajo interpretacijo vzrokov za spremembo v gibanju umetnih satelitov za nadaljnje modeliranje.

## Literatura

E. M. Mickhail, F. Ackerman: *Observation and least squares*. University Press of America, Lanham, New York, 1976.

O. Montenbruck, E. Gill: *Satellite Orbits*. Springer Verlag, 2000.

P. Pavlovčič Prešeren: *Metode izračuna tirnic GPS-satelitov za potrebe geodezije*. Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, FGG, 2003.

B. Zebhauser: *Zur Entwicklung eines GPS-Programmsystems für Lehre und Tests unter besonderer Berücksichtigung der Ambiguity Function Methode; GPSLAB Toolbox*. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, München 1999.

URL naslovi:

<http://celestrak.com/NORAD>

<http://gibs.leipzig.ifag.de>