

ANALIZA VPLIVA TEŽNOSTNEGA POLJA NA DOLOČITEV VIŠIN TOČK V RAZLIČNIH VIŠINSKIH SISTEMIH

Anka Lisec, Božo Koler in Miran Kuhar*

Povzetek

Višino točke v geodeziji določamo glede na predhodno določeno referenčno ploskev, ki skupaj z izhodiščno točko z znano višino določa višinski datum. Na klasična geodetska opazovanja, ki jih izvajamo na površini Zemlje ali v njeni bližini, vplivajo različni dejavniki okolja, med drugim tudi vpliv sile teže. Določitev absolutne višine točke nad ničelno nivojsko ploskvijo v klasični geodeziji, geoidom, je torej povezana s poznavanjem vpliva težnostnega polja Zemlje na terestrično izmero. Številni avtorji so v preteklosti definirali več različnih višinskih sistemov. Numerična analiza višinskih sistemov se nanaša na nivelmansko zanko, ki je stabilizirana v jugozahodnem delu Slovenije (Izola–Malija–Lucija–Izola), dolgo približno 15 km in z nadmorskimi višinami reperjev med 2 m in 280 m. Rezultati raziskave so pokazali, da ima vsak od višinskih sistemov tako dobre kot slabe lastnosti. Najbolj izstopajo normalne višine Molodenskega, ki za razliko od ortometričnih višin niso odvisne od hipotez o porazdelitvi mas pod površjem Zemlje in so hkrati osnova višinskemu sistemu EUVN.

KLJUČNE BESEDE: višinski datum, težnostno polje, gravimetrija, višine, višinski sistem, nivelman, geopotencialne kote, dinamične višine, ortometrične višine, normalne višine.

Abstract

In the most surveying applications, the height of a point should refer to mean sea level in some colloquial sense, or more precisely to a vertical datum. Vertical datum is the term for a well-defined reference surface for heights that is accessible at least at one point, called the origin point. A comprehensive discussion of heights with respect to the traditional vertical datum, the geoid, demands the basic knowledge of gravitational potential of the Earth. Thus, to get well defined and useful heights, the influence of the gravity field on terrestrial height measurements has to be taken into account. The objective of this study is to show numerical experiments and results of field tests for computing height corrections based on the measured gravity. The numerical calculations are based on a closed 15 km levelling loop located in the southwestern part of Slovenia (Izola - Malija - Lucija - Izola) with heights between 2 m and 280 m. The results show that none of considered height systems meets all the requirements of an ideal system. From all the examined height systems the normal heights of Molodensky, the official system of EUVN, seems to be the best compensation between all the requirements, represented in the first part of the article. On the other side because of satellite positioning techniques three-dimensional geodesy is becoming more and more important. In that sense ellipsoidal heights are placed in the foreground.

KEY WORDS: vertical datum, gravity field, gravimetry, heights, height system, levelling, geopotential number, dynamic heights, orthometric heights, normal heights.

Uvod – višine pri geometričnem nivelmanu

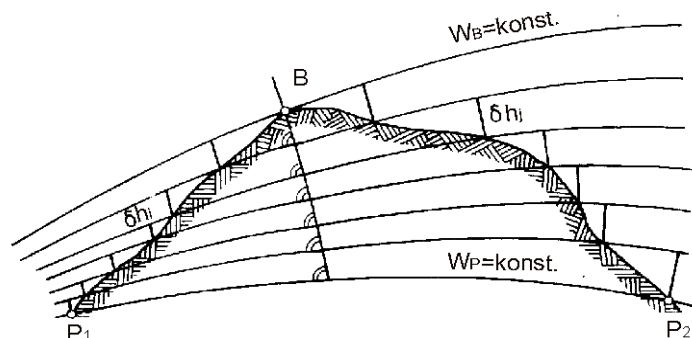
Pri določevanju nadmorske višine točke v sodobnih nivelmanskih mrežah višjih redov je potrebno poleg popravkov, ki so povezani s terestrično izmero in pogreški instrumenta,

* FGG – Oddelek za geodezijo, Jamova 2, 1000 Ljubljana

upoštevati tudi dejstvo, da poteka izmera v težnostnem polju Zemlje. Popravke niveliranih višinskih razlik zaradi vpliva težnostnega polja Zemlje je mogoče določiti s približnimi enačbami ali pa se nepravilno težnostno polje opiše z normalnim težnostnim poljem.

Nivojske ploskve Zemlje niso vzporedne, kar nam kaže spodnja slika (Slika 1). Nevzporednost nivojskih ploskev se odraža pri geometričnem nivelmanu. Naj bosta točki P_1 in P_2 točki na isti nivojski ploskvi (na nivoju morja, geoida). Nadmorsko višino točke B dobimo kot vsoto delnih višinskih razlik δh . V primeru niveliranja z dveh različnih strani je očitno, da dobimo za nadmorsko višino točke B dve različni vrednosti:

$$\sum_{i=1}^n \delta h_i \neq \sum_{j=1}^n \delta h_j. \quad (1)$$



Slika 1: Nevzporednost nivojskih ploskev (Leismann et al., 1992; str. 15)

Vpliv nevporednosti nivojskih ploskev na rezultat geometričnega nivelmana lahko zapišemo kot (Leismann et al., 1992):

$$\Delta H \approx -0,0053 \cdot H_m \cdot \Delta \varphi \cdot \sin(2\varphi_m) \quad (2)$$

Kjer so:

H_m	...	srednja višina nivelmanske linije,
$\Delta \varphi$...	razlika geografske širine med začetno in končno točko linije,
φ_m	...	srednja geografska širina.

Numerična konstanta predstavlja težnostno sploščenost nivojskega elipsoida GRS80, kjer dejansko težnostno polje nadomestimo z normalnim. Za dolžino nivelmanske linije 50 km ($\Delta \varphi = 0,008$ rad) in srednjo višino linije $H_m = 500$ m dobimo $\Delta H = 0,02$ m, kar je več kot znaša običajna natančnost niveliranja višinskih razlik na tej razdalji.

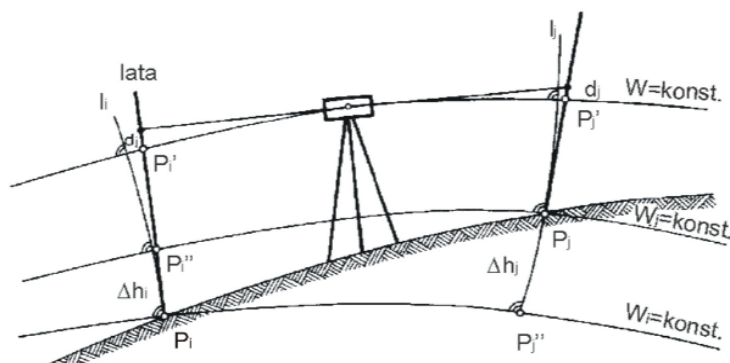
Za nedvoumno določitev višine točke lahko višino definiramo z razliko potencialov. Poljubni točki pripada natanko ena nivojska ploskev, zato je točki prirejena le ena vrednost potenciala W . Razlika potencialov dveh točk je enolično določena in je neodvisna od poti. Primer postavitve nivelirja med dvema točkama prikazuje slika (Slika 2), kjer postavimo na točkah P_i in P_j pravokotno nivelmanski lati. Vizurna linija je tangenta na nivojsko ploskev skozi optično središče objektiva nivelirja. Razliko potencialov zapišemo kot (Leismann et al., 1992):

$$W_j - W_i = - \int_{P_i}^{P_j} g \delta h = -(l_i \bar{g}_i - l_j \bar{g}_j) \quad (3)$$

Kjer so:

Δh	...	nivelirana višinska razlika,
l_i, l_j	...	dolžina težiščnice od nivojske ploskve W_i do točke P_i' (P_j'),
i, j	...	odčitka na latah,

$$\bar{g}_i = \frac{1}{l_i} \int g \delta h \quad \dots \quad \text{srednja vrednost težnostnega pospeška vzdolž težiščnice.}$$



Slika 2: Niveliranje (Leismann et al., 1992; str.16)

Dolžino težiščnice lahko izrazimo tako, da odčitku na lati i (j) prištejemo popravek d_i (d_j) in razliko potencialov zapišemo kot:

$$W_j - W_i = -\frac{1}{2}(i-j)(\bar{g}_i + \bar{g}_j) - \frac{1}{2}(i+j)(\bar{g}_i - \bar{g}_j) + \frac{1}{2}(d_i + d_j)(\bar{g}_i + \bar{g}_j) + \frac{1}{2}(d_i + d_j)(\bar{g}_i - \bar{g}_j). \quad (4)$$

V primeru niveliranja iz sredine je razlika ($d_i - d_j$) pri preciznem niveliranju zanemarljiva, prav tako lahko zanemarimo drugi in četrti člen izraza (Leismann et al., 1992). Iz tega sledi, da za določitev nadmorske višine točke B velja:

$$W_0 - W_B = \int_{P_0}^P dW = - \int_{P_0}^P g \delta h = - \int_{P_0}^P g' \delta h', \quad (5)$$

kjer integriramo vzdolž terena (δh) od geoida do točke **P** ali vzdolž težiščnice ($\delta h'$) točke **P** (glej sliko 3). V praksi nam količini h in g nista znani kot zvezni funkciji, zato integrale v izrazu (5) ne moremo obravnavati analitično in ga nadomestimo z vsoto:

$$W_0 - W_B = - \sum_{i=1}^n \bar{g}_i' \delta h_i'. \quad (6)$$

Teoretično odstopanje pri zapiranju nivelmanske zanke

Vrhunjenje libele in lega kompenzatorja nivelirja sta tesno povezana s težnostnim poljem Zemlje, zato višine točk, določene na osnovi rezultatov geometričnega nivelmana, niso nedvoumno določene, saj so odvisne od poti niveliranja. Če bi teoretično imeli na voljo prave višinske razlike, ki niso obremenjene s pogreški merjenja, bi kljub temu bila vsota višinskih razlik v zaključeni nivelmanski zanki različna od nič:

$$\varepsilon = \oint \delta h, \quad (7)$$

medtem ko velja, da je vsota razlik potencialov v zaključeni zanki

$$\oint dW = - \oint g \delta h = 0. \quad (8)$$

Zgornji integral lahko izrazimo kot vsoto višinskih razlik, ki jih dobimo z razliko odčitkov lat pri niveliranju:

$$\varepsilon \approx \sum_{i=1}^n \delta h_i' = - \sum_{i=1}^n \frac{g_i - G_0}{G_0} \delta h_i', \quad (9)$$

kjer g_i predstavlja težnostni pospešek na stojišču instrumenta, G_0 pa izbrano vrednost za gostoto. Vrednost težnostnega pospeška na stojišču instrumenta je ponavadi določena kot srednja vrednost težnosti na izmeniščih lat. Iz izrazov (8) in (9) je razvidno, da bo vsota niveliranih višinskih razlik v zaključeni zanki enaka nič, če bo težnostni pospešek konstanten (za poljubna g_c in G_0 mora biti $\varepsilon = 0$):

$$\varepsilon = -\oint \frac{g - G_0}{G_0} \delta h = -\oint \frac{g_c - G_0}{G_0} \delta h = \left(1 - \frac{g_c}{G_0}\right) \oint \delta h = \left(1 - \frac{g_c}{G_0}\right) \varepsilon. \quad (10)$$

Dejansko se težnost spreminja od točke do točke, predvsem pri večjih oddaljenostih, in sicer še posebej na razgibanem terenu. Pri izravnavi večjih nivelmanskimi mrež lahko pripelje zanemarjanje teoretičnega odstopanja pri zapiranju nivelmanske zanke do sistematičnih napetosti v mreži, zato ga moramo obravnavati pri izravnavi večjih mrež.

Definicija višinskega sistema

Definicija višinskega sistema je dokaj težavna naloga, saj je višina neločljivo povezana s težnostnim poljem Zemlje. Sicer lahko višino definiramo tudi geometrično, na primer z elipsoidnimi (geodetskimi) koordinatami, vendar so le-te za vsakdanjo uporabo v tehničnih nalogah neprimerne, saj točke istih elipsoidnih višin odstopajo od nivojskih ploskev tudi do ± 100 m. Pri definiciji višinskega sistema je potrebno upoštevati zahteve čim širšega kroga uporabnikov. Danes je v Sloveniji veljaven višinski sistem s tako imenovanimi normalnimi ortometričnimi višinami. Vertikalni datum predstavlja ničelna nivojska ploskev oziroma srednji nivo morja, ki je bila določena leta 1875 na osnovi mareografskih opazovanj na pomolu Sartorio v Trstu.

Za idealni višinski sistem naj bi veljalo (Bilajbegović, 1989):

1. Višine točk morajo biti enolično določene in neodvisne od poti niveliranja.
2. Višine se morajo določiti enolično na osnovi fizikalnih meritev na fizični površini Zemlje brez uvedenih hipotez in predpostavk o notranji sestavi Zemlje.
3. Iz višin naj bi se določila geoidna ondulacija z zadovoljivo natančnostjo na čim bolj enostaven način. Tako bi bila mogoča enostavna povezava višin izbranega sistema z elipsoidnimi višinami, ki jo zahteva satelitska metoda določevanja položaja točk na površini Zemlje (GPS).
4. Višine točk naj bi bile podane v metrih, za katere mora obstajati geometrična razlaga.
5. Točke z isto višino morajo ležati na isti nivojski ploskvi.
6. Popravki merjenih višinskih razlik naj bodo čim manjši, da jih pri niveliranju nivelmanskimi vlakovi nižjega reda lahko zanemarimo.
7. Preračun obstoječih višin, normalnih ortometričnih višin, v novi sistem naj bi bil enostaven, popravki naj bi bili čim manjši.

Vsem naštetim zahtevam ne ustreza noben višinski sistem, saj so si zahteve med seboj tudi protislovne, to pa pomeni, da se mora višinski sistem določiti na osnovi kompromisov.

Geopotencialne kote

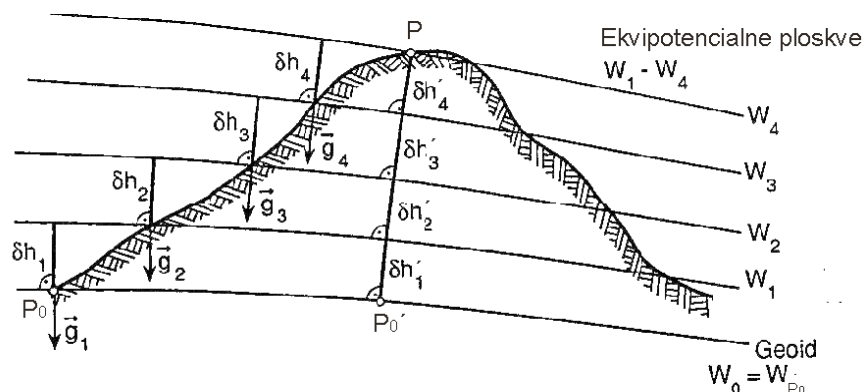
Eden od načinov predstavitve višinskega položaja je težnostni potencial, saj skozi poljubni točki poteka natanko ena nivojska ploskev. Razlika potencialov dveh sosednjih nivojskih ploskev je enaka delu, ki ga moramo premagati, da enoto mase prenesemo z ene na drugo nivojsko ploskev. Če za začetno ploskev vzamemo geoid s potencialom W_0 , imenujemo razliko potencialov geopotencialna kota. Nivelman, kjer integriramo vzdolž

težiščnice ($\delta h'$) ali pa vzdolž terena (δh) do točke P, imenujemo geopotencialni nivelman (Slika 3).

$$C_P = W_0 - W_P = - \int_{P_0}^P g' \delta h' = \int_{P_0}^P g \delta h \approx \sum_{i=1}^n g_{mi} \Delta h_i \quad (11)$$

g_{mi} ... srednja vrednost težnostnega pospeška,
 Δh_i ... nivelirana višinska razlika.

Enoto za geopotencialno koto imenujemo geopotencialno število ali GPU (angl. geopotencial unit), kjer je $1 \text{ GPU} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ali v starih enotah $1 \text{ GPU} = 1000 \text{ Galm}$, saj se vrednosti geopotencialnih kot ne razlikujejo od nadmorskih višin za več kot za 2 %.



Slika 3: Geopotencialni nivelman (Wirth, 1990; str. 8)

Geopotencialne kote se v praksi niso uveljavile, saj so za uporabnike takšne fizikalno definirane višine neuporabne. Zaradi dobrih lastnosti pa so se geopotencialne kote uveljavile v raznih teoretičnih nalogah. Celotna evropska nivelmanska mreža REUN (fran. Reseau Europeen Unifie de Nivellement) je danes znana kot EUVN (angl. European Vertical Network) in se nanaša na ničelno točko v Amsterdamu – NAP (angl. Normal Amsterdams Peil). Že od leta 1954 se izravnava v geopotencialnih kotah. Prav tako je izravnana z geopotencialnimi kotami nova severnoameriška nivelmanska mreža NAVD88 (angl. North American Vertical Datum 1988).

Dinamične višine

Dobra lastnost geopotencialnih kot je konstantna vrednost na isti nivojski ploskvi. Da dobimo količino z omenjeno lastnostjo v metrih, delimo geopotencialne kote s konstantno vrednostjo težnega pospeška na nivoju elipsoida z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$ in dobimo dinamične višine.

$$H_P^D = \frac{C}{\gamma_0^{45}} = \int_{P_0}^P \delta h + \int_{P_0}^P \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \approx \sum_{i=1}^n \Delta h_i + \sum_{i=1}^n \frac{g_{mi} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \Delta h_i \quad (12)$$

γ_0^{45} ... normalni težnostni pospešek za $\varphi = 45^\circ$,
 g_{mi} ... srednja vrednost težnostnega pospeška,
 Δh_i ... nivelirana višinska razlika.

Dinamične višinske razlike dobimo tako, da merjeni višinski razliki med obema reperjema prištejemo dinamični popravek, ki eliminira odstopanje višinskih razlik pri zaključeni nivelmanski zanki:

$$DP_{ij} = \int_{P_i}^{P_j} \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta h \approx \sum_{i=1}^n \frac{g_{mi} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \Delta h_i. \quad (13)$$

Dinamične višine so pomembne predvsem v hidrologiji in pri gradbenih delih. Poleg tega, da te višine nimajo geometrične razlage, so problematični predvsem veliki dinamični popravki pri večjih višinskih razlikah in pri nivelmanskimi linijah, ki potekajo v smeri sever-jug. Težnost od ekvatorja do pola se namreč spreminja do $5 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$, kar se posledično odraža v velikosti dinamičnega popravka. Zaradi omenjenih razlogov se dinamične višine ne uporabljajo kot uradni višinski sistem v nobeni evropski državi.

Ortometrične višine

Ortometrična višina točke P na površju Zemlje predstavlja oddaljenost točke P od točke P_0 na geopotencialni ploskvi (geoidu), kjer je dolžina merjena vzdolž težiščnice. Ortometrično višino dobimo, če geopotencialno koto C točke P delimo s srednjo vrednostjo težnostnega pospeška vzdolž težiščnice:

$$H_P^{OR} = \int_{P_0}^P \delta h' = - \int_{P_0}^P \frac{dW}{g_i'} = \int_{P_0}^P \frac{dC}{g_i'} = - \int_{P_0}^P \frac{g}{g_i'} \delta h = \frac{C_P}{\bar{g}_P'}. \quad (14)$$

V praksi določimo ortometrične višinske razlike tako, da niveliranim višinskim razlikam prištejemo ortometrični popravek (Leismann et al., 1992):

$$OP_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{g_{mi} - \gamma_0^\varphi}{\gamma_0^\varphi} \Delta h_i + \frac{\bar{g}_i - \gamma_0^\varphi}{\gamma_0^\varphi} H_i^{OR} - \frac{\bar{g}_j - \gamma_0^\varphi}{\gamma_0^\varphi} H_j^{OR} \quad (15)$$

g_{mi}	...	srednja vrednost težnostnega pospeška,
Δh_i	...	nivelirana višinska razlika,
H_i^{OR}, H_j^{OR}	...	približne ortometrične višine reperjev P_i in P_j ,
\bar{g}_i	...	srednja vrednost težnostnega pospeška vzdolž težiščnice med geoidom in točko P_i ,
γ_0^φ	...	normalni težnostni pospešek za geografsko širino φ .

Ortometrični popravek tvorijo trije členi. Prvi člen predstavlja dinamični popravek, ki je odvisen od poti niveliranja in znaša nekaj centimetrov. Naslednja dva člena sta krajevno odvisna in ju izračunamo na osnovi predpostavk o porazdelitvi mas. Tudi ta dva popravka sta velika, vendar nasprotnega predznaka kot dinamični popravek, zato je skupni ortometrični popravek relativno majhen in znaša od nekaj milimetrov do centimetra.

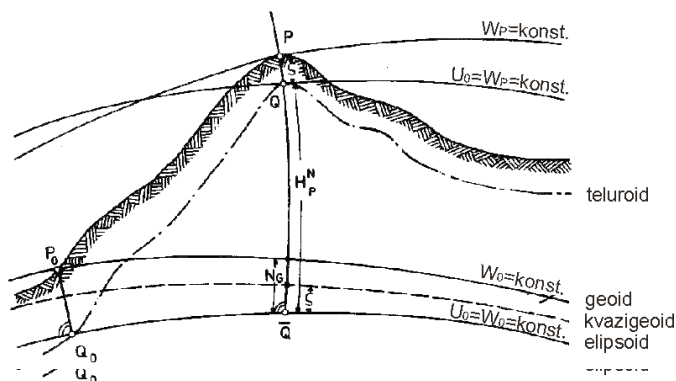
Ortometrične višine imajo geometrijski pomen, vendar predstavlja največji problem določitev težnostnega pospeška vzdolž težiščnice. Težnostni pospešek moramo določiti za izračun ortometričnega popravka (znaša nekaj mm), določimo pa ga lahko samo na osnovi hipotez o porazdelitvi gostote. V praksi določimo le bolj ali manj natančne približke ortometričnih višin. Obstaja več načinov kako določiti čim boljši približek teoretičnemu srednjemu pospešku vzdolž težiščnice. Ponavadi se imenujejo po avtorju metode izračuna.

Normalne višine

Normalna višina je definirana v normalnem težnostnem polju in se nanaša na kvazigeoid. Osnova definiciji normalnega težnostnega polja je nivojski elipsoid, čigar ploskev je ekvipotencialna ploskev lastnega težnostnega polja. Normalna višina je prav tako geometrično definirana višina, le da se za razliko od ortometrične višine izognemo predpostavkam o porazdelitvi Zemljinih mas. Dobimo jo, če geopotencialno koto delimo s srednjo vrednostjo normalnega pospeška vzdolž „normalne težiščnice“.

$$H^N = \frac{c}{\bar{\gamma}_i}; \quad \bar{\gamma}_i = \frac{1}{H_i^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N \quad (16)$$

Srednja vrednost normalnega pospeška se išče na odseku težiščnice v normalnem težnostnem polju med točko Q_0 na nivojskem elipsoidu in točko Q na teluroidu. Teluroid je geometrijsko mesto točk, za katerega velja, da je v vsaki njegovi točki Q izpolnjeno $W_P = U_Q$. Višinska razlika med teluroidom in fizično površino Zemlje je anomalija višine ζ_P . Če normalne višine nanesejo navzdol od fizične površine, dobimo novo ploskev – kvazigeoid, ki ni nivojska ploskev, vendar se od nje le minimalno razlikuje.



Slika 4: Normalne višine (Leismann et al., 1992; str. 41)

Normalne višine določimo tako, da niveliranim višinskim razlikam prištejemo normalni popravek:

$$NP_{ij} = \sum_i \frac{g_{mi} - G_0}{G_0} \Delta h_i + \frac{\bar{\gamma}_i - G_0}{G_0} H_i^N - \frac{\bar{\gamma}_j - G_0}{G_0} H_j^N \quad (17)$$

g_{mi}	...	srednja vrednost težnostnega pospeška,
Δh_i	...	nivelirana višinska razlika,
G_0	...	poljubna vrednost težnostnega pospeška,
H_i^N	...	približne normalne višine točke P_i ,
$\bar{\gamma}_i$...	srednja vrednost normalnega težnostnega pospeška vzdolž normale.

Elipsoidne višine (h)

Elipsoidna višina je najkrajša razdalja med točko na površju Zemlje in referenčnim elipsoidom. Definirana je popolnoma geometrično. Elipsoidno višino lahko izrazimo tudi s pomočjo razlik normalnega težnostnega potenciala:

$$h_i = \frac{U_0 - U_{P_i}}{\bar{\gamma}_i} \quad (18)$$

Če želimo višinske sisteme povezati z elipsoidnimi koordinatami, moramo poznati geoidno ondulacijo oz. višino kvazigeoida. Tako velja, da ortometrične in elipsoidne višine povezuje geoidna ondulacija ($h = H_0 + N$), normalne in elipsoidne višine pa višina kvazigeoida ($h = H_N + \zeta$). Pomen elipsoidnih višin se je izredno povečal z razvojem GPS. Pri slednjem višine določamo vzdolž normale na elipsoid in ne po ukrivljeni težiščnici, vendar je razlika zanemarljiva (Wirth, 1990).

Primerjava višinskih sistemov

Osnova za izračun višin v različnih višinskih sistemih, ki so predstavljeni v članku, so nivelirane višinske razlike in vrednosti težnostnega pospeška na opazovani točki. Testno območje je nivelmanska zanka Izola-Malija-Lucija-Izola. Območje je bilo izbrano zaradi razgibanosti terena, kjer znašajo nadmorske višine točk vzdolž 15,52 km dolge nivelmanske zanke od 2 do 280 m. Za potrebe izračuna višin točk v različnih sistemih so bili nivelmanski podatki prevzeti iz nivelmanske izmere leta 1997. Gravimetrični podatki so deloma prevzeti iz gravimetrične izmere za potrebe določitve geopotencialnih kot točk EUVN iz leta 2000, na ostalih točkah pa je bil težnostni pospešek določen z relativnimi gravimetričnimi meritvami z instrumentom Scintrex CG-3M. Relativna gravimetrična izmera je bila navezana na absolutno gravimetrično točko, ki je stabilizirana v gradu Socerb. V mrežo EUVN je vključena točka 180 Malija. Mreža točk EUVN pa je navezana na mrežo UELN95, v katero je vključen reper 5486, ki je stabiliziran v bližini mareografa v Kopru.

V analizo so bile vključene dinamične višine, ortometrične višine po Helmertu, Baranovu, Ramsayerju (3 predlogi), Strangu, in Chenu (2 predloga) ter normalne višine po Molodenskem, Hirvonenu, Vignalu, Bomfordu in normalne ortometrične višine. Ortometrične višine, ki za izračun srednjega težnostnega pospeška vzdolž težiščnice upoštevajo vpliv topografskih mas in izostatske popravke, v raziskavo niso bile vključene, saj bi za izračun potrebovali dodatne podatke, ki pa jih žal nismo imeli na razpolago.

Za potrebe izračuna popravkov niveliranih višinskih razlik oziroma vrednosti reduciranega težnostnega pospeška, ki je predstavljal osnovo za nadaljnji izračun, so bile približne višine točk določene na osnovi niveliranih višinskih razlik, glede na dani reper 3926:

$$H_P^{SYS} = H_{3926}^{SYS} + \sum_{i=1}^n \Delta h_i. \quad (19)$$

VIŠINE		OZNAKE
DINAMIČNE VIŠINE		i, j indeksi točk P_i in P_j na fizični površini Zemlje (izmenišče nivelmanske late),
Dinamične višine ¹	$DP_{ij} = \int_{P_i}^{P_j} \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta h \approx \sum_{i=1}^n \frac{g_{mi} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \Delta h_i [m]$	DP_{ij} dinamični popravek nivelirane višinske razlike med P_i in P_j ,
ORTOMETRIČNE VIŠINE		OP_{ij} ortometrični popravek nivelirane višinske razlike med P_i in P_j ,
Helmert ¹	$\bar{g}^{HE} = g_P + (3,086 - 0,83818\rho_P) \cdot 10^{-6} \frac{H_P^{OR}}{2} [ms^{-2}]$ $H_P^{OR} [m]$ približna ortometrična višina, $\delta g_0 = (3,086 - 0,83818\rho_P) \cdot 10^{-6} H_P^{OR/2} [ms^{-2}]$ redukcija po Poincare in Prey.	NP_{ij} normalni popravek nivelirane višinske razlike med P_i in P_j ,
RamsayerI ¹	$\bar{g}^{RAMI} = g_P + (3,086 - 0,83818\rho_P) \cdot 10^{-6} \frac{H_P^{OR}}{2} - \frac{\bar{H}^{OR}}{H_P^{OR}} ((g_P - g_{P1}) + 3,086 \cdot 10^{-6} (H_P^{OR} - H_{P1}^{OR}) - 0,41909 \cdot 10^{-6} (\rho_P H_P^{OR} - \rho_{P1} H_{P1}^{OR})) [ms^{-2}]$ P_1 izhodiščna (dana) točka nivelmanske zanke/mreže, g_0^{P1} reducirana vrednost na izhodiščno/dano točko linije, \bar{H}^{OR} srednja ortom. višina točk nivelmanske mreže.	NOPI_{ij} normalni ortometrični popravek nivelirane višinske razlike med P_i in P_j , g_P (g_i) težnostni pospešek na točki P (P_i), g_{mi} aritmetična sredina težnosti na izmeniščih $g_{mi} = \frac{1}{2}(g_{i-1} + g_i)$, \bar{g}_P srednja vrednost g vzdolž težiščnice med točko P in geoidom,
RamsayerII ¹	$\bar{g}^{RAMII} = g_P + (3,086 - 0,41909\rho_P) \cdot 10^{-6} \frac{H_P^{OR}}{2} [ms^{-2}]$	γ₀^φ normalni težnostni pospešek točke na elipsoidu z geografsko širino φ (GRS80),
RamsayerIII ¹	$\bar{g}^{RAMIII} = \gamma_0^\phi - \frac{1}{2} (3,086 - 0,41909 \rho_P) \cdot 10^{-6} H_P^{OR} [ms^{-2}]$	γ₀⁴⁵ normalni težnostni
Baranov ¹	$\bar{g}^{BA} = \frac{1}{2} (g_P + \gamma_0^\phi) [ms^{-2}]$	
Strang ²	$OP_{ij} = 0,114 \cdot 10^{-3} H_m \Delta h_{ij} - 0,83 \cdot 10^{-3} \sin 2\varphi_m SH_m [mm]$	

Chen I ²	$OP_{ij} = (\gamma_0^\varphi)^{-1} [H_i(\gamma_i - \gamma_j) + \Delta h_{ij}(\gamma_m - \gamma_j)] [m]$	pospešek točke na elipsoidu z geografsko širino $\varphi - 45^\circ$ (GRS80), γ_i normalni težnostni pospešek točke P_i (φ, h) (GRS80), $\bar{\gamma}_P$ srednja vrednost γ vzdolž normale med točkama na teluroidu in elipsoidu, ki pripadata točki P, δh višinska razlika med izmeniščema nivelmanskih lat, Δh nivelirana višinska razlika med dvema točkama, W težnostni potencial, U normalni težnostni potencial, C geopotencialna kota, φ geografska širina, φ_m srednja vrednost φ dveh sosednjih točk nivelmanske mreže, φ^N normalna geografska širina P (P_i) točka na fizični površini Zemlje, Po točka na geoidu, H_m srednja višina dveh sosednjih točk nivelmanske mreže [m], H_i^D dinamična višina točke P_i [m], H_i^{OR} ortometrična višina točke P_i [m], H_i^N normalna višina točke P_i [m], H_i^{NO} normalna ortometrična višina točke P_i [m], ρ gostota ($2,67 \text{ kgm}^{-3}$), S dolžina nivelmanske linije med dvema točkama.
Chen II ²	$OP_{ij} = \gamma_0^{-1} [H_i(\bar{g}_i - \bar{g}_j) + \Delta h_{ij}(g_m - \bar{g}_j)] [m]$ $g_m = (g_i + g_j)/2$ $\bar{g}_i = g_i + 0,0424H_{P_i}$ g_i , reduciran na geoid	
NORMALNE VIŠINE		
Molodenski ¹	$NP_{i,j} = -0,000025685 \cdot H_m \Delta \varphi'' + 0,00101987(g - \gamma)_s \Delta h_{ij} [mm]$ Δh višinska razlika [m], $\Delta \varphi$ razlika v geografski širini ["].	
Vignal ¹	$\bar{\gamma}_P^{VG} = \gamma_0^\varphi - 3,086 \cdot 10^{-6} \frac{H_P^N}{2} [\text{ms}^{-2}]$	
Bomford ¹	$\bar{\gamma}_P^{BO} = \gamma_0^{45} - 3,086 \cdot 10^{-6} \frac{H_P}{2} [\text{ms}^{-2}]$	
Hirvonen ¹	$H_P^N = \frac{C_P}{\gamma_0^\varphi} + \left(\frac{C_P}{\gamma_0^\varphi}\right)^2 (1,5785760 \cdot 10^{-7} - 1,029316 \cdot 10^{-9} \sin^2 \varphi_P^N + 1,66432 \cdot 10^{-11} \sin^4 \varphi_P^N)$ $+ \left(\frac{C_P}{\gamma_0^\varphi}\right)^3 (2,4761 \cdot 10^{-14} - 2,01 \cdot 10^{-16} \sin^2 \varphi_P^N) [m]$ $\varphi_P - \varphi_P^N \approx -0,00017'' \sin(2\varphi_P) H_P^N$ (normalna geogr. širina)	
NORMALNE ORTOMETRIČNE VIŠINE		
Normalne višine za Slovenijo ³	$NOP_{ij} = -0,000025707 \sum_i (H_{mi} \sin 2\varphi_{mi}) \Delta \varphi'' [mm]$ $NOP_{ij} = -0,000025687 \cdot H_m \Delta \varphi''$ H_m srednja višina v metrih, $\Delta \varphi''$ razlika geografskih širin v sekundah.	

Tabela 1: Izračun popravkov niveliranih višinskih razlik po različnih avtorjih
(¹Vir: Leismann et al., 1992; ²Vir: Kao et al., 2000; ³Vir: Bilajbegović, 1989)

Skupna lastnost izračuna višin vseh višinskih sistemov, razen ortometričnih višin po Strangu, Chenu in normalnih ortometričnih višin, je ta, da se za prehod iz enot geopotencialnih kot v enote metra določi neka srednja vrednost težnostnega pospeška vzdolž težiščnice oziroma normale. Geopotencialne kote, ki so določene na osnovi niveliranih višinskih razlik in meritev težnostnega pospeška, delimo s srednjo vrednostjo težnostnega pospeška in dobimo višine, podane v metrih.

V primeru dinamičnih višin geopotencialne kote delimo s konstantno vrednostjo težnostnega pospeška za vsako točko. Normalne višine so določene na osnovi vrednosti normalne težnosti točke na elipsoidu in težnosti pripadajoče točke na teluroidu, pri tem pa so višine neodvisne od porazdelitve mas pod površjem Zemlje. Na drugi strani je težnostni pospešek ortometričnih višin določen vzdolž prostorske krivulje, težiščnice, med točko na površini Zemlje in pripadajočo točko na geoidu. Zaradi nepoznavanja dejanskih vrednosti težnostnega pospeška vzdolž težiščnice je za ortometrične višine značilno, da so definirane na osnovi hipotez o spreminjanju težnostnega pospeška pod površjem Zemlje, ki so bolj ali

manj približki stvarnim vrednostim. Ortometrične višine se lahko med seboj precej razlikujejo glede na to, kakšne predpostavke prevzamemo pri njihovem definiranju.

Kljub skupnemu izhodišču višinskih sistemov, geopotencialnih kot, imajo različni višinski sistemi različne lastnosti. Primerjava predstavljenih višinskih sistemov je bila izvedena na osnovi minimalnih in maksimalnih popravkov nivelirane višinske razlike, srednjega popravka, minimalnega in maksimalnega popravka utežne enote (na kilometer nivelmanske linije). Velikost popravkov niveliranih višinskih razlik se spreminja od nekaj desetink milimetra do centimetra, podobni velikostni red pa predstavljajo tudi razlike višin različnih višinskih sistemov. Na tem mestu velja opozoriti na dejstvo, da se predvsem ortometrični popravki povečujejo z večanjem nadmorske višine točk in večanjem razgibanosti terena, kar so pokazale raziskave v tujini na večjih in bolj reliefno razgibanih območjih. Na kratko je mogoče rezultate analize višinskih sistemov strniti v naslednji tabeli, kjer se orientiramo na zahteve idealnega višinskega sistema po Bilajbegoviću (Tabela 2).

Lastnosti	VIŠINSKI SISTEMI					
	geopot. kote	dinamične višine	ortometrične višine	normalne višine	no-ortom. višine	elipsoidne. višine
1	da	da	da	da	ne	da
2	da	da	ne	da	da	da
3	ne	da	da	da	da	
4a	ne	da	da	da	da	da
4b	ne	ne	da	da	ne	da
4c	geoid	geoid	geoid	kvazigeoid	NN ploskev	ref. elipsoid
5	da	da	da	ne	ne	ne
6	ne	ne	nekateri*	da**	da	ne

Tabela 2: Lastnosti posameznih višinskih sistemov
(nekateri* - Baranov, Ramsayer, Strang, Chen)
(da** - izjema višine po Bomfordu)

- 1 – enolično določene višine, neodvisne od poti niveliranja,
- 2 – višine, ki so neodvisne od raznih predpostavk,
- 3 – matematična povezava z elipsoidnimi višinami,
- 4a – višine točk podane v metrih,
- 4b – geometrična razlaga višin,
- 4c – referenčna ploskev,
- 5 – točke z isto višino ležijo na isti nivojski ploskvi,
- 6 – popravki merjenih višinskih razlik so majhni.

Zaključek

Zaradi različnih zahtev in lastnosti višinskih sistemov so se v preteklosti v različnih deželah uveljavili različni višinski sistemi. Tako se je v državah bivše Jugoslavije in s tem tudi v Sloveniji uveljavil sistem normalnih ortometričnih višin. Zaradi kriterijev, omenjenih in predstavljenih v članku, se je v Sloveniji pokazala težnja po uvedbi novega višinskega sistema, kjer so primerne, sodeč po rezultatih raziskave, predvsem normalne višine (na primer Molodenski) in ortometrične višine.

Glede na to, da se v Evropi vzpostavlja skupna evropska višinska mreža, kjer so uporabljene normalne višine, bi bilo najbrž smotrno tudi pri nas uvesti normalne višine. Le-te namreč izpolnjujejo največ pogojev idealnega višinskega sistema. Res pa je, da se s satelitskim določevanjem položaja točk vse pogosteje uporabljajo elipsoidne višine in zato ne moremo zanikati, da se te višine ne bodo uveljavile v praksi. Zaradi inženirskih del v gradbeništvu in hidrotehniko so potrebne tudi višine, ki imajo fizikalno osnovo. Smotrna je uvedba paralelnih višinskih sistemov. Za fizikalno definirani višinski sistem bi bilo tako potrebno izbrati sistem, katerega višine lahko pretvorimo v elipsoidne višine in obratno – na primer normalne višine in elipsoidne višine.

Literatura

- Bilajbegović, A., 1984. Praktično računanjen normalnih in normalnih ortometrijskih visina. Geodetski list, št. 7-9, str. 165 - 178, Zagreb.
- Bilajbegović, A., 1989. II NVT SFRJ – Druga faza obrade. Poročilo, Zagreb.
- Ihde, J., Augath, W., 2000. The Vertical Reference System for Europe. EUREF Technical Working Group, Tromsø.
- Jekeli, C., 2000. Heights, the Geopotential and Vertical Datums. Ohio State University.
- Kao, S-P., Hsu, R., Ning, F-S., 2000. Results of field test for computing orthometric correction based on measured gravity. Geomatics Research Australasia.
- Leismann, M., Klees, R., Beckers, H., 1992. Untersuchungen verschiedener Höhensysteme, dargestellt an einer Testschleife in Rheinland-Pfalz. Bayerische Akademie der Wissenschaften, München.
- Lichtenegger, H., Kraiger, G., 1996. Zum Einsatz von GPS in der Hochgebirgsgravimetrie. 7. Internationale Alpengravimetrie-Kolloquium, Wien.
- Lisec, A., 2002. Analiza višinskih sistemov na osnovi nivelmanske in relativne gravimetrične izmere nivelmanske zanke Malija. Diplomski naloga, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana.
- Ruess, D., 1996. Schwereberechnungen im ortometrischen Höhensystem Österreichs. 7. Internationale Alpengravimetrie-Kolloquium, Wien.
- Stopar, B., Kuhar, M., 2000. National Report of Slovenia. EVS 2000 - Working Group, Tromsø.
- Strang, H., 1992. Practical formulas for the computation of orthometric, dynamic and normal heights. ZfV, Heft 11/1992.
- Torge, W., 1991. Geodesy. Zbirka de Gruyter, Berlin - New York.
- Wahr, J., 1996. Geodesy and Gravity. University of Colorado – Department of Physics, Boulder.
- Wirth, B., 1990. Höhensysteme, Schwerepotenziale und Niveauflächen: Systematische Untersuchungen zur zukünftigen terrestrischen und GPS-gestützten Höhenbestimmung in der Schweiz. Schweizerische Geodätische Kommission, Zürich.